INTRODUCCIÓN A MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Mauricio Junca
Universidad de los Andes

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

PARTE I

MERCADOS FINANCIEROS

Un mercado financiero consiste de instrumentos o activos transables tales como acciones, bonos, monedas, *commodities*, etc. La razón principal para la existencia de los mercados financieros es el flujo de dinero.

Por ejemplo, los bonos son instrumentos que generan pagos fijos en tiempos determinados (los hay cero cupón o con cupones) y pueden servir como una forma de ahorro para el comprador y como forma de financiación para el vendedor. En los modelos que veremos más adelante, los bonos son denominados activos *libres de riesgo*. (En realidad, nos son libres de riesgo del todo pues existe el riesgo de defecto del emisor del bono o el riesgo de liquidez, es decir, que no se pueda transar fácilmente.)

Por otro lado, las acciones generan pagos aleatorios en tiempos aleatorios (cuando generan dividendos) y son los denominados activos *con riesgo*. Representan una porción de la compañía que emite la emite y su precio es producto de perspectivas de crecmiento del emisor y especulación.

Una parte importante de los mercados financieros son los derivados. Estos son instrumentos cuyo valor depende del valor de otros instrumentos que bien puede ser una acción, un bono, una moneda o un derivados mismo. Los dos usos principales de los derivados son especulación y cubrir el riesgo de una posición del activo subyacente. Algunos derivados son futuros, *forwards*, opciones, *swaps*, etc.

En esta primera parte veremos cómo valorar estos derivados a partir del concepto de arbitraje en diferentes modelos de mercado.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El concepto de arbitraje es central en la teoría de mercados financieros y daremos una definición rigurosa más adelante. Cuando se define un modelo para un mercado siempre se busca que el modelo no permita arbitraje pues se considera que los mercados financieros son libres de arbitrage, o en su defecto, estas oportunidades desaparecen muy rápidamente. El principal objetivo de esta primera parte consistirá en encontrar el precio *justo* de un derivado, donde con valor justo nos referimos al valor del derivado que no permita una oportunidad de *arbitraje*, es decir, una oportunidad que genera ganancias sin ningún riesgo. En algunos casos el precio justo del derivado es independiente del modelo que se use para describir el compotamiento de los activos en el tiempo y en otros casos depende del modelo, como veremos más adelante.

1.1 Algunos derivados

Se entiende por *vender en corto* un activo financiero a vender un activo *prestado* con la promesa de devolverlo en el futuro, se dice entonces que se tiene una posición en corto. Por el contrario, una posición en largo se tiene cuando se posee el activo. Usando esta terminología, veamos algunos ejemplos de derivados. Liquidar una posición corta significa devolver el activo prestado y liquidar una posición larga significa vender el activo.

EJEMPLO 1.1 ***Forward***

Un *forward* es un contrato que obliga a una de las partes a comprarle un activo con riesgo a la otra parte por un precio F, llamado precio de entrega, en el tiempo T, sin que haya ningún intercambio de dinero en el momento de iniciar el contrato. ¿Cuál es el precio de entrega justo? Supongamos primero que existe un activo libre de riesgo que vale 1 en el momento de iniciar el contrato y $1 + r$ en el tiempo T, con $r > 0$. Supongamos también que el activo es un acción y su precio al inicio del contrato es s. Consideremos la siguiente estrategia (o como veremos más adelante, portafolio): Entre en el contrato *forward*, el cual no tiene ningún costo, venda en corto el activo, lo que genera una entrada de s e invierta esto en bonos. El costo neto de esta estrategia es 0. En el momento T, se debe pagar F por el activo, al recibirlo se liquida la posición en corto y se obtiene un balance de $s(1 + r) - F$. Puesto que no queremos arbitraje, esta estrategia no puede generar ganancias sin riesgo, y como todas las cantidades son conocidas se debe tener que $F \geq s(1 + r)$. Ahora, la estrategia contraria, emitir un contrato *forward*, vender en corto el activo sin riesgo y comprar la acción, genera un balance de $F - s(1 + r)$, luego $F \leq s(1 + r)$. Finalmente, tenemos que el precio de entrega justo es $F = s(1 + r)$.

¿Depende el precio de entrega del modelo que se tenga para la acción?

EJEMPLO 1.2 Opción *call*

Una *opción call de tipo europeo* es un contrato que permite al portador el derecho, pero no la obligación, de comprar el subyacente a un precio determinado K (llamado precio de *ejercicio*) en un momento determinado T (llamado *tiempo de maduración*). A diferencia del *forward*, entrar en la opción tiene un costo. En este caso el subyacente será la tasa de cambio peso dolar (USCOP), la cual el 5 de enero de 2014 tiene un valor de \$2.400. La opción tiene un costo de \$800, un precio de ejercicio de \$1.800 y fecha de expiración 20 de febrero de 2014.

Escenario 1: Supongamos que la tasa de cambio el 20 de febrero tiene un valor de \$3.000, entonces el portador de la opción puede ejercerla y lograr una ganancia de \$3000-1800-800=\$400. Si el valor de la opción se hubiera invertido comprando dolares directamente se tendría un ganancia de \$1000-800=\$200.

Escenario 2: Supongamos que la tasa de cambio el 20 de febrero es de \$1.700. En este caso el portador de la opción no la ejerce y se iene una pérdida de \$800. En caso de haber invertido en dolares se tendría una pérdida de \$233,33.

¿Es el precio de la opción del ejemplo 1.2 el precio justo dados estos dos únicos escenarios?

En los siguientes capítulos se introducirán los conceptos básicos de la teoría de los mercados financieros, empezando con modelos muy simples de un período hasta llegar al modelo de Black-Scholes y estudiaremos la forma de valorar derivados en estos mercados.

1.1.1 Paridad *put-call*

Consideremos la opción *call* descrita en el ejemplo anterior, y la opción *put* europea donde se tiene la opción de vender el activo al precio de ejercicio K, ambas con la misma acción como subyacente. Si denotamos con C el precio de la opción *call* y P el precio de la

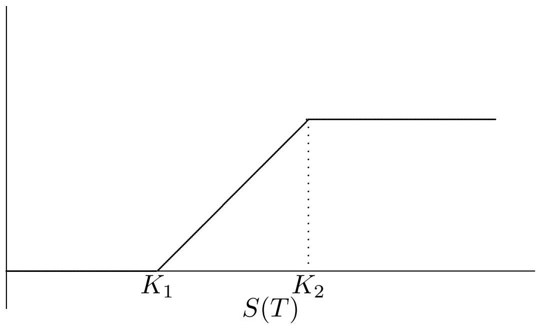

Figura 1.1: *Bull spread*

opción *put*, entonces se debe cumplir la relación

$$C - P = s - \frac{K}{1+r}. \tag{1.1}$$

Supongamos que esta relación no se cumple y por el contrario se tiene que $C - P > s - \frac{K}{1+r}$. En este caso podemos construir una estrategia que genera arbitraje de la siguiente forma: Comprar una acción por s, comprar una opción *put*, vender una opción *call* y finalmente invertir el excedente $C - P - s$ en el activo libre de riesgo. En el tiempo de maduración T se tienen dos posibilidades para $S(T)$, el precio de la acción en el tiempo T: Si $S(T) \geq K$ la opción *put* no se ejerce, se entrega la acción al poseedor de la opción *call* y se recibe K. Al final se obtiene un saldo de $K + (C - P - s)(1 + r) > 0$ y esto implica arbitraje. Si $S(T) \leq K$ la opción *call* no la ejercen, se ejerce la opción *put*, luego se entrega la acción y se recibe K y tenemos la misma situación que en el caso anterior. Ahora, si se tiene que $C - P < s - \frac{K}{1+r}$ podemos construir una estrategia de arbitraje haciendo las opraciones contrarias a las descritas arriba y tenemos arbitraje igualmente. Así, concluimos que se debe cumplir la ecuación (1.1).

Otra forma de entender la paridad es a través de las funciones de pago de las opciones con respecto al valor de la cción en el tiempo T, $S(T)$. Para la opción *call* se tiene que esta función es $c(S) = \max\{S - K, 0\}$ y para la opción *put* es $p(S) = \max\{K - S, 0\}$. Si tenemos dos portafolios con la misma función de pago, el valor en tiempo 0 de ambos portafolios debe ser el mismo para que no hay arbitraje, lugo la paridad se puede obtener verificando que

$$c(S) - p(S) + K = S.$$

Usando las opciones *call* y *put* podemos obtener cualquier función de pago que sea lineal a trozos, lo que permite cubrirse ante eventos no deseados con el precio de la acción. Algunas funciones de pago usadas son las llamadas *spreads*, como por ejemplo *bull spread* (ver figura 1.1), el cual se construye comprando una opción *call* con precio de ejercicio K_1 y vendiendo una opción *call* con precio de ejercicio $K_2 > K_1$, ambas con el mismo tiempo de maduración T. El precio de una opción con esta función de pago debe ser entonces $C(K_1) - C(K_2)$, con $C(K)$ el precio de una opción *call* con precio de ejercicio K y que madura en T.

1.2 Supuestos generales

En el ejemplo 1.1 y en la paridad *put-call* asumimos ciertos supuestos, como son:

- Se pueden tener posiciones en corto y en largo en cualquier cantidad de todos los activos del mercado. Es decir, la posición de un activo es cualquier número real.
- El precio de compra de los activos es el mismo precio de venta, y este precio no cambia por el volumen de transacciones.
- No hay costos de transacción.
- Las acciones no generan dividendos.
- El mercado es completamente líquido, esto quiere decir que se pueden comprar y vender caulquier cantidad de activos.

Es claro que las ecuaciones de arriba no se tienen si alguno de estos supuestos no se cumple. Estos supuestos son comunes a todos los modelos que veremos en los siguientes capítulos.

Gran parte del trabajo de investigación en matemáticas financieras se ocupa de estudiar mercados (más cercanos a la realidad) donde estos supuestos no se cumplen. Por ejemplo, aunque la venta en corto es una característica importante de los mercados financieros, ésta se restringe en algunos mercados de forma temporal o permanente.

PROBLEMAS

1.1 [3] Suponga que un inversionista en Nueva York ofrece comprar pesos colombianos en un año a 0.00055 dolares el peso, mientras que un inversionista en Bogotá vende pesos colombianos inmediatamente a 0.00057 dolares el peso. Suponga que la tasa libre de riesgo en Nueva York es de 2% anual, y la tasa en Bogotá es de 6% anual. Diga si existe alguna posibilidad de arbitraje.

1.2 El ejercicio anterior es en realidad un *forward* sobre la tasa de cambio. Si la tasa de cambio actual es s, la tasa libre de riesgo local es r y la tasa libre de riesgo extranjera es r_f, ¿cuál debe ser el precio de entrega justo?

1.3 Suponga que en un mercado no se permite la venta en corto de acciones. ¿Cómo es la relación entre F y $s(1+r)$ en el ejemplo 1.1?

1.4 Encuentre la paridad *put-call* cuando las opciones son sobre tasa de cambio, con tasa libre de riesgo extranjera r_f.

1.5 Sea $C(K)$ el precio de una opción *call* con precio de ejercicio K. Muestre que C es decreciente y convexa como función de K.

1.6 Encuentre el precio en el tiempo 0 de un derivado con función de pago $f(S) = \max\{\frac{S}{2}, S-K\}$ en el tiempo T, con $K > 0$, en términos de los precios de la acción y opciones *call* en el tiempo 0.

CAPÍTULO 2

MODELOS DE UN PERÍODO

En este capítulo estudiaremos los modelos más simples de un mercado financiero, empezando con un modelo binomial y luego un modelo un poco más general pero finito.

2.1 Modelo binomial

2.1.1 Descripción

Vamos a suponer que existen dos activos: uno libre de riesgo que llamaremos bono y su precio lo denotaremos por $B(t)$, y otro con riesgo que llamaremos acción y su precio lo denotaremos $S(t)$. Puesto que es un modelo de solo un período, solo consideramos los instantes de tiempo $t \in \{0, T\}$.

Por simplicidad asumiremos que el precio actual del bono es $B(0) = 1$ y el precio en el tiempo T está dado por $B(T) = 1 + r$, con $r \geq 0$ fijo y conocido, llamado tasa de retorno libre de riesgo. El precio actual de la acción $S(0) = s$, con $s > 0$, es también conocido, pero el precio en el tiempo T está dado por $S(T) = sX$, donde X es la variable aleatoria (ver sección A.1) definida en el espacio $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$, $P(\{\omega_i\}) = p_i > 0$, con $i = u, d$, dada por

$$X(\omega_u) = u > X(\omega_d) = d > 0. \tag{2.1}$$

En este caso la tasa de retorno de la acción es una variable aleatoria dada por

$$\frac{S(T) - s}{s} = \frac{sX - s}{s} = X - 1.$$

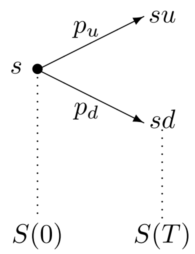

Figura 2.1: Acción en el modelo binomial de un período

2.1.2 Arbitraje y TFVA1

El concepto escencial en la teoría de mercados financieros es el de arbitraje. Para poder definir rigurosamente este concepto debemos definir primero la noción de portafolio.

Definición 2.1 *Un portafolio es un par $\delta = (\delta_0, \delta_1)$ que representa el número de bonos y el número de acciones, respectivamente. $\delta_i < 0$ representa una venta corta en el activo correspondiente.*

Dado un portafolio δ, denotamos por $V_\delta(t)$ el valor del portafolio en el tiempo t y está dado por

$$V_\delta(t) = \delta_0 B(t) + \delta_1 S(t). \tag{2.2}$$

Note que $V_\delta(0)$ es un valor fijo conocido mientras que $V_\delta(T)$ es una variable aleatoria, es decir, una función del espacio muestral Ω.

Definición 2.2 *Un portafolio δ genera una posibilidad de arbitraje si $V_\delta(0) = 0$, $P(V_\delta(T) \geq 0) = 1$ y $P(V_\delta(T) > 0) > 0$.*

Veamos ahora una condición necesaria y suficiente para que el modelo binomial no tenga oportunidades de arbitraje.

Proposición 2.3 *El modelo es libre de arbitraje si y solo si se satisface que $u > 1+r > d$.*

Demostración: Supongamos que $1 + r \geq u > d$. Esto quiere decir que es mejor invertir en el bono que en la acción. Así que podemos construir el portafolio $\delta = (s, -1)$, es decir, vendemos en corto una acción y con esto compramos bonos. Entonces

$$V_\delta(0) = s - s = 0$$

y

$$V_\delta(T) = s(1 + r) - S(T) = s(1 + r - X) \geq 0.$$

Además, $P(V_\delta(T) > 0) = P(1 + r > X) \geq P(X = d) = p_d > 0$. Es decir, tenemos un portafolio que genera arbitraje.

Análogamente, si $u > d \geq 1 + r$ es mejor invertir en la acción, luego hacemos $\delta = (-s, 1)$. En este caso tenemos

$$V_\delta(0) = -s + s = 0$$

y

$$V_\delta(T) = -s(1 + r) + S(T) = s(-1 - r + X) \geq 0.$$

Igualmente, $P(V_\delta(T) > 0) = P(1+r < X) \geq P(X = u) = p_u > 0$ y tenemos de nuevo una oportunidad de arbitraje.

Supongamos ahora que $u > 1+r > d$ y mostremos que no existe portafolio que genere arbitraje. Sea δ cualquier portafolio tal que $V_\delta(0) = 0$. Puesto que $V_\delta(0) = \delta_0 + s\delta_1 = 0$, entonces $\delta_0 = -s\delta_1$, luego

$$V_\delta(T) = -s\delta_1(1+r) + \delta_1 S(T) = s\delta_1(-1 - r + X).$$

Ahora, si $\delta_1 > 0$, entonces $P(V_\delta(T) \geq 0) = P(X = u) = p_u < 1$ y no hay arbitraje. Si $\delta_1 < 0$ tampoco hay arbitraje pues $P(V_\delta(T) \geq 0) = P(X = d) = p_d < 1$. Finalmente, si $\delta_1 = 0$ entonces $P(V_\delta(T) > 0) = 0$. ■

La proposición anterior es esencial para mostrar lo que se conoce como el Primer Teorema Fundamental de la Valoración de Activos (TFVA1). Note que la condición $u > 1 + r > d$ es equivalente a la existencia de $\alpha \in (0, 1)$ tal que $1 + r = \alpha u + (1 - \alpha)d$, es decir, $1+r$ es una combinación convexa propia de u y d. A partir de este α podemos definir una nueva medida de probabilidad sobre nuestro espacio muestral Ω, que llamaremos Q, tal que $\alpha = Q(\{\omega_u\}) = q_u = 1 - Q(\{\omega_d\}) = 1 - q_d$. Bajo esta nueva medida tenemos entonces que

$$E_Q[X] = 1 + r, \tag{2.3}$$

es decir, la tasa de retorno esperada de la acción es la misma tasa de retorno libre de riesgo y por esta razón llamamos a la medida Q de riesgo neutral.

Definición 2.4 *Una medida de probabilidad Q definida en $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$ es de riesgo neutral si es equivalente a P (es decir, $Q(\{\omega_u\}) > 0$ y $Q(\{\omega_d\}) > 0$) y*

$$\frac{1}{1+r} E_Q[S(T)] = S(0) = s. \tag{2.4}$$

Claramente (2.3) es equivalente a la condición (2.8) y tenemos entonces el TFVA1:

Teorema 2.5 *El mercado es libre de arbitraje si y solo si existe una medida de riesgo neutral.*

Llamamos probabilidad real a la medida P pues es la que se observa. De la ecuación (2.3) y el hecho de que $q_u + q_d = 1$ se tiene que la única medida de riesgo neutral para este modelo está dada por

$$q_u = \frac{(1+r) - d}{u - d} \text{ y } q_d = \frac{u - (1+r)}{u - d}. \tag{2.5}$$

2.1.3 Valoración de derivados

Veamos la utilidad de la medida de riesgo neutral en la valoración de derivados (justificando el nombre del TFVA1).

Definición 2.6 *Un derivado o derecho contingente Λ es cualquier variable aleatoria definida en el espacio muestral Ω.*

En muchas ocaciones el derivado se puede expresar a través de una función de pago de la forma $\Lambda = f(S(T))$. Para la opción call del ejemplo 1.2 se tiene que $f(S) = c(S) = \max\{S - K, 0\}$.

EJEMPLO 2.1

Supongamos un que existe un derecho contingente Λ tal que $\Lambda(\omega_u) = 0$ y $\Lambda(\omega_d) = 5$. El precio actual de la acción es $s = 100$, los valores de la variable X son $u = 1,1$ y $d = 1,02$ con $p_u = 0,75$ y $p_d = 0,25$. La tasa de retorno libre de riesgo es $r = 0,05$. ¿Cómo encontramos el valor de este derivado?

Definición 2.7 *Un derivado Λ es replicable si existe un portafolio δ tal que $P(V_\delta(T) = \Lambda) = 1$. En tal caso δ se denomina portafolio replicante.*

EJEMPLO 2.1 continuación

Veamos si este derecho es replicable, para eso debemos encontrar un portafolio δ que satisfaga el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 1,05\delta_0 + 110\delta_1 &= 0 \\ 1,05\delta_0 + 102\delta_1 &= 5. \end{aligned}$$

La solución de este sistema es $\delta_1 = -0,625$ y $\delta_0 = 65,48$. Esto quiere decir que para replicar el derecho se deben comprar $65,48$ bonos y vender en corto $0,625$ acciones. Para esto se requiere de una inversión inicial de $V_\delta(0) = 65,48 - 62,5 = 2,98$.

El ejemplo anterior muestra que en este mercado todo derecho es replicable pues el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (1+r)\delta_0 + su\delta_1 &= \Lambda(\omega_u) \\ (1+r)\delta_0 + sd\delta_1 &= \Lambda(\omega_d) \end{aligned}$$

tiene solución única dada por

$$\delta_1 = \frac{\Lambda(\omega_u) - \Lambda(\omega_d)}{s(u-d)} \text{ y } \delta_0 = \frac{u\Lambda(\omega_d) - d\Lambda(\omega_u)}{(1+r)(u-d)}. \tag{2.6}$$

Definición 2.8 *Si todos los derechos en un mercado son replicables se dice que el mercado es completo.*

El ejemplo además sugiere la siguente idea importante: Si un derivado es replicable, entonces el valor del derivado debe coincidir con el valor inicial del portafolio replicante, de lo contrario se tendría una oportunidad de arbitraje. Así que, usando las ecuaciones (2.5) y (2.6), el valor $\Pi(0,\Lambda)$ del derecho Λ está dado por

$$\begin{aligned} \Pi(0,\Lambda) &= \delta_0 + s\delta_1 \\ &= \frac{u\Lambda(\omega_d) - d\Lambda(\omega_u)}{(1+r)(u-d)} + \frac{\Lambda(\omega_u) - \Lambda(\omega_d)}{u-d} \\ &= \frac{1}{1+r}\left(\frac{(1+r)-d}{u-d}\Lambda(\omega_u) + \frac{u-(1+r)}{u-d}\Lambda(\omega_d)\right) \\ &= \frac{1}{1+r}\left(q_u\Lambda(\omega_u) + q_d\Lambda(\omega_d)\right) \\ &= \frac{1}{1+r}E_Q[\Lambda] \end{aligned} \tag{2.7}$$

La ecuación (2.7) nos dice que para valorar un derivado debemos calcular su valor esperado respecto a la medida de riesgo neutral y descontarlo usando la tasa de retorno libre de riesgo.

¿Por qué la medidad de riesgo neutral y no la real?

EJEMPLO 2.1 continuación

Usando las ecuaciones (2.5) tenemos que

$$q_u = \frac{1,05 - 1,02}{0,08} = 0,375 \text{ y } q_d = \frac{1,1 - 1,05}{0,09} = 0,625.$$

Entonces, de (2.7) se obtiene

$$\Pi(0, \Lambda) = \frac{0,625}{1,05} 5 = 2,98 = V_\delta(0).$$

Las ideas presentes en este modelo tan sencillo serán la base para el modelo CRR que veremos en siguiente capítulo.

2.2 Modelo general

2.2.1 Descripción

En este caso suponemos que en el mercado existen m acciones y un bono, que se comporta de la misma forma que en el caso binomial. Suponemos ahora que el espacio muestra tiene n estados, es decir, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ y $P(\{\omega_j\}) = p_j > 0$ para $j = 1, \dots, n$. El precio actual de las acciones lo denotamos por

$$\mathbf{S}(0) = \begin{pmatrix} S_1(0) \\ \vdots \\ S_m(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}.$$

En el tiempo T, el precio de las acciones está dado por las variables aleatorias $S_i(T)(\omega_j) = s_{ij}$ para $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$. Definimos la matriz $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ como $\mathbf{\Sigma}_{ij} = s_{ij}$.

2.2.2 Arbitraje y TFVA1

Igual que en la sección anterior, debemos definir portafolio en este modelo de mercado.

Definición 2.9 *Un portafolio es un vector $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^{m+1}$, donde δ_0 representa el número de bonos y δ_i el número de acciones de la acción i, para $i = 1, \dots, m$.*

Vamos a denotar con $\overline{\boldsymbol{\delta}} \in \mathbb{R}^m$ el número de acciones del portafolio, sin incluir el número de bonos. Así, tenemos que el valor del portafolio en el tiempo t es

$$V_\delta(t) = \delta_0 B(t) + \overline{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{S}(t).$$

Análogamente, un portafolio genera arbitraje si satisface las condiciones de la definición 2.2.

Definición 2.10 *Una medida de probabilidad Q definida en $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ es de riesgo neutral si es equivalente a P (es decir, $Q(\{\omega_j\}) = q_j > 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$) y*

$$\frac{1}{1+r} E_Q[S_i(T)] = S_i(0) = s_i, \text{ para todo } i = 1, \ldots, m \tag{2.8}$$

Vamos ahora probar el TFVA1 para este modelo y para esto usaremos algunos resultados de la teoría de dualidad de programación lineal (ver Apéndice B).

Teorema 2.11 *El mercado es libre de arbitraje si y solo si existe una medida de riesgo neutral.*

Demostración: Suponga que existe una medida de riesgo neutral Q y sea δ un portafolio tal que $V_\delta(0) = 0$ y $P(V_\delta(T) \geq 0) = 1$. Esta última condición implica que la variable aleatoria $V_\delta(T) \geq 0$, luego

$$Q(V_\delta(T) \geq 0) = 1. \tag{2.9}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
E_Q[V_\delta(T)] &= \delta_0(1+r) + \sum_{i=1}^{m} \delta_i E_Q[S_i(T)] \\
&= \delta_0(1+r) + \sum_{i=1}^{m} \delta_i s_i (1+r) \\
&= (1+r)\left(\delta_0 + \overline{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{S}(0)\right) \\
&= (1+r) V_\delta(0) = 0,
\end{aligned}$$

que junto con (2.9) implica que la variable $V_\delta(T) = 0$, luego no hay arbitraje. Para la otra dirección debemos construir una medida de riesgo neutral. Como el mercado es libre de riesgo se tiene que no existe portafolio tal que $V_\delta(0) = 0$, $V_\delta(T) \geq 0$ y $P(V_\delta(T) > 0) > 0$, es decir, dados $\epsilon > 0$ y $k \in \{1, \ldots, n\}$ arbitrarios, el siguiente programa lineal es infactible

$$\begin{array}{rl}
\min & 0 \\
\text{sujeto a} & \delta_0 + \mathbf{S}(0)^T \overline{\boldsymbol{\delta}} = 0 \\
& \delta_0 (1+r)\mathbf{1} + \boldsymbol{\Sigma}^T \overline{\boldsymbol{\delta}} \geq \epsilon \mathbf{e}_k,
\end{array} \tag{P}$$

donde $\mathbf{e}_k$ es el k-ésimo vector unitario en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{1}$ es el vector de unos también en $\mathbb{R}^n$. El problema dual de (P) es el problema

$$\begin{array}{rl}
\max & \epsilon p_k = \epsilon \mathbf{p}^T \mathbf{e}_k \\
\text{sujeto a} & p_0 + (1+r)\mathbf{p}^T \mathbf{1} = 0 \\
& p_0 \mathbf{S}(0)^T + \mathbf{p}^T \boldsymbol{\Sigma}^T = \mathbf{0}^T \\
& \mathbf{p} \geq \mathbf{0},
\end{array} \tag{D}$$

con variables de decisión p_0 y $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Puesto que (P) es infactible y (D) es factible entonces el dual es no acotado (ver tabla B.2). Esto implica que existen $p_0^{(k)}$ y $\mathbf{p}^{(k)} \geq \mathbf{0}$ que satisfacen las restricciones del dual y además $p_k^{(k)} > 0$. Como k es arbitrario, tomando la suma de estos vectores encontramos p_0^* y $\mathbf{p}^* > 0$ que satisfacen las restricciones en (D), es decir,

$$p_0^* = -(1+r)\mathbf{1}^T\mathbf{p}^* < 0 \tag{2.10}$$
$$p_0^*\mathbf{S}(0) = -\mathbf{\Sigma}\mathbf{p}^*. \tag{2.11}$$

Usando las ecuaciones anteriores podemos definir la medida Q como $q_j = -\frac{1+r}{p_0^*}p_j^* > 0$ para $j = 1, \ldots, n$. De (2.10) se tiene que efecto Q es una medida de probabilidad y de (2.11) se obtiene que para todo $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+r}E_Q[S_i(T)] &= \frac{1}{1+r}\sum_{j=1}^{n} q_j s_{ij}\\ &= -\frac{1}{1+r}\sum_{j=1}^{n}\frac{1+r}{p_0^*}p_j^* s_{ij}\\ &= s_i,\end{aligned}$$

luego Q es una medida de riesgo neutral. ■

Del teorema anterior es importante resaltar el hecho de que para todo portafolio δ y toda medida de riesgo neutral Q se tiene que

$$E_Q[V_\delta(T)] = (1+r)V_\delta(0) \tag{2.12}$$

EJEMPLO 2.2

Considere un mercado de un periodo con un activo libre de riesgo de tasa $r = 0,05$, $m = 2$ con $s_1 = 80$ y $s_2 = 50$, y $S_i(T) = s_i X_i$, donde X_1, X_2 son variables aleatorias independientes con $P(X_1 = 1,1) = P(X_1 = 0,9) = P(X_2 = 1,2) = P(X_2 = 0,8) = \frac{1}{2}$. Se puede pensar en dos acciones independientes que siguen el modelo binomial de un periodo. Tenemos entonces $n = 4$ y

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 88 & 88 & 72 & 72 \\ 60 & 40 & 60 & 40 \end{pmatrix}.$$

Viendo las dos acciones independienteme podemos encontrar una medida de riesgo neutral. Usando (2.5) tenemos que $q_u^1 = \frac{3}{4}$, $q_d^1 = \frac{1}{4}$, $q_u^2 = \frac{5}{8}$, $q_d^2 = \frac{3}{8}$. Así, podemos definir

$$\begin{aligned} q_1 &= q_u^1 q_u^2 = \frac{15}{32}\\ q_2 &= q_u^1 q_d^2 = \frac{9}{32}\\ q_3 &= q_d^1 q_u^2 = \frac{5}{32}\\ q_4 &= q_d^1 q_d^2 = \frac{3}{32}. \end{aligned}$$

Podemos verificar que en efecto esta es una medida de riesgo neutral:

$$\frac{1}{1,05}E_Q[S_1(T)] = \frac{1}{1,05}\left(\frac{3}{4}88 + \frac{1}{4}72\right) = 80,$$
$$\frac{1}{1,05}E_Q[S_2(T)] = \frac{1}{1,05}\left(\frac{5}{8}60 + \frac{3}{8}40\right) = 50.$$

Esto muestra que el modelo es libre de arbitraje por el TFVA1. Pero notemos que para este modelo esta medida que encontramos no es la única, es más, hay infinitas. Por ejemplo, es fácil ver que la siguiente medida $\overline{Q}$ lo es:

$$\overline{q}_1 = \frac{1}{2}, \overline{q}_2 = \frac{1}{4}$$
$$\overline{q}_3 = \frac{1}{8}, \overline{q}_4 = \frac{1}{8}.$$

La existencia de más de una medida de riesgo neutral tiene implicaciones importantes en la valoración de derivados como veremos a continuación.

2.2.3 Valoración de derivados y TFVA2

Igual que en el modelo binomial, la idea para valorar derivados en este mercado consiste en construir portafolios replicantes. Recordemos que un derivado es simplemente una variable aleatoria Λ definida en nuestro espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ y que el derivado es replicable si existe un portafolio δ tal que $P(V_\delta(T) = \Lambda) = 1$. De nuevo, la idea importante es que si el mercado no permite arbitraje y el derivado Λ es replicable con el portafolio δ, entonces el valor del derivado $\Pi(0, \Lambda) = V_\delta(0)$.

¿Podría construir una oportunidad de arbitraje si $\Pi(0, \Lambda) \neq V_\delta(0)$*? Recuerde, comprar barato y vender caro.*

EJEMPLO 2.2 continuación

Consideremos la opción *call* canasta con pesos $w_1 = 0.5$ y $w_2 = 0.5$ y precio de ejercicio $K = 56$ en nuestro mercado, es decir, un derivado con función de pago $\Lambda = \max\{w_1 S_1(T) + w_2 S_2(T) - K, 0\}$. Veamos si este derivado es replicable, para esto debemos encontrar una solucíon al sistema

$$\delta_0 1,05 + \delta_1 88 + \delta_2 60 = 18$$
$$\delta_0 1,05 + \delta_1 88 + \delta_2 40 = 8$$
$$\delta_0 1,05 + \delta_1 72 + \delta_2 60 = 10$$
$$\delta_0 1,05 + \delta_1 72 + \delta_2 40 = 0.$$

La única solución de este sistema es $\delta = (-\frac{160}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, luego $\Pi(0, \Lambda) = V_\delta(0) = -\frac{160}{3} + \frac{80}{2} + \frac{50}{2} = \frac{35}{3}$.

Veamos ahora la relación entre el valor del derivado y la medida de riesgo neutral dada por este importante teorema

Teorema 2.12 *En un mercado libre de arbitraje, el precio de cualquier derivado replicalble está dado por*

$$\Pi(0,\Lambda) = \frac{1}{1+r}E_Q[\Lambda], \tag{2.13}$$

para cualquier medida de riesgo neutral Q.

Demostración: Sea Q cualquier medida de riesgo neutral del mercado y δ un portafolio replicante de Λ. Usando (2.12) se tiene que

$$\frac{1}{1+r}E_Q[\Lambda] = \frac{1}{1+r}E_Q[V_\delta(T)] = V_\delta(0) = \Pi(0,\Lambda).$$

■

EJEMPLO 2.2 continuación

Comprobemos el resultado del teorema anterior con nuestra opción *call* canasta. Si usamo las medidas Q y $\overline{Q}$ tenemos

$$\frac{1}{1,05}E_Q[\Lambda] = \frac{1}{1,05}\left(\frac{15}{32}18 + \frac{9}{32}8 + \frac{5}{32}10\right) = \frac{35}{3}$$

y

$$\frac{1}{1,05}E_{\overline{Q}}[\Lambda] = \frac{1}{1,05}\left(\frac{1}{2}18 + \frac{1}{4}8 + \frac{1}{8}10\right) = \frac{35}{3}.$$

En el modelo binomial se cumplía que todo derecho es replicable, es decir, que el mercado es completo. En el modelo general este no es siempre el caso. El criterio que caracteriza la completitud del mercado se conoce como el Segundo Teorema Fundamental de la Valoración de Activos (TFVA2).

Teorema 2.13 *En un mercado libre de arbitraje el mercado es completo si y solo si la medida de riesgo neutral es única.*

Demostración: Que el mercado sea completo es equivalente a que para todo derivado Λ, existe un portafolio δ que lo replique, es decir, que para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, el sistema

$$(1+r)\mathbf{1}\delta_0 + \mathbf{\Sigma}^T\overline{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{b}$$

tiene solución. Esto pasa si y solo si el rango de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}(1+r)\mathbf{1} & \mathbf{\Sigma}^T\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(m+1)}$ es n y por el teorema de nulidad y rango esto es equivalente a que la nulidad de $\mathbf{A}^T = 0$. Ahora, como el modelo es libre de arbitraje existe al menos una medida de riesgo neutral y por tanto el sistema

$$\mathbf{A}^T\mathbf{q} = \begin{pmatrix}(1+r)\\(1+r)\mathbf{S}(0)\end{pmatrix}$$

es consistente, luego la nulidad de $\mathbf{A}^T = 0$ si y solo si el sistema tiene solución única. ■

Del teorema anterior podemos ver que el mercado es incompleto cuando $m+1 < n$, luego el modelo del ejemplo 2.2 es incompleto. Si tenemos un mercado incompleto tenemos entonces derivados que no son replicables y por tanto el teorema 2.12. La pregunta ahora es ¿cómo se valoran estos derivados? La teoría desarrollada hasta ahora sugiere dos caminos:

- Considerar portafolios que ”cercanos” al derivado.
- Usar la ecuación del teorema 2.12 para diferentes medidas de riesgo neutral.

Vamos a ver que en realidad estos dos caminos son dos caras de la misma moneda. Empezando con el primer acercamiento, tenemos la siguiente definición

Definición 2.14 *Sea Λ un derivado, entonces*

(i) Un portafolio δ super-replica el derivado si $P(V_\delta(T) \geq \Lambda) = 1$.

(ii) Un portafolio δ sub-replica el derivado si $P(V_\delta(T) \leq \Lambda) = 1$.

El precio ask *del derivado es $\Pi^a(0, \Lambda) := \inf\{V_\delta(0) : \delta$ es super-replicante de $\Lambda\}$ y el precio* bid *es $\Pi^b(0, \Lambda) := \sup\{V_\delta(0) : \delta$ es sub-replicante de $\Lambda\}$*

Un portafolio super-replicante es útil para el emisor del derivado pues le sirve para garantizar que tiene la forma de responderle al comprador sin importar lo que pase en T. As, $\Pi^a(0, \Lambda)$ sería el máximo precio tolerable en el mercado sin que el emisor tenga una ganancia sin riesgo. De igual forma, un portafolio sub-replicante le sirve al comprador para financiar el derivado y $\Pi^b(0, \Lambda)$ es el mínimo precio sin que haya ganancia sin riesgo.

El ejercicio 2.9 nos dice que $\Pi^b(0, \Lambda) \leq \Pi^a(0, \Lambda)$ y que coinciden cuando el derivado es replicable. Veamos qué pasa cuando no lo es.

Teorema 2.15 *Sea Λ un derivado no replicable en un modelo libre de arbitraje. Entonces existen portafolios δ^a y δ^b super- y sub-replicantes respectivamente tales que $V_{\delta^a}(0) = \Pi^a(0, \Lambda)$ y $V_{\delta^b}(0) = \Pi^b(0, \Lambda)$. Además $\Pi^b(0, \Lambda) < \Pi^a(0, \Lambda)$.*

Demostración: Considere los problemas lineales

$$\begin{array}{rl} \min(\max) & \delta_0 + \mathbf{S}(0)^T\overline{\boldsymbol{\delta}} \\ \text{sujeto a} & \delta_0(1+r)\mathbf{1} + \boldsymbol{\Sigma}^T\overline{\boldsymbol{\delta}} \geq (\leq)\boldsymbol{\Lambda}, \end{array} \tag{P1}$$

donde $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^n$ representa el valor del derivado para cada realización ω_i, con sus duales

$$\begin{array}{rl} \max(\min) & \mathbf{p}^T\boldsymbol{\Lambda} \\ \text{sujeto a} & (1+r)\mathbf{p}^T\mathbf{1} = 1 \\ & \mathbf{p}^T\boldsymbol{\Sigma}^T = \mathbf{S}(0)^T \\ & \mathbf{p} \geq \mathbf{0}. \end{array} \tag{D1}$$

Note que la existencia de una medida de riesgo neutral Q nos garantiza que los problemas (D1) son factibles (tomando $(1 + r)Q$) y además la región factible es acotada, luego sus óptimos son finitos. Esto implica que los problemas (P1) también son finitos y existen portafolios δ^a y δ^b que alcanzan los valores óptimos, que son claramente $\Pi^a(0, \Lambda)$ y $\Pi^b(0, \Lambda)$ respectivamente. Ahora, como Λ no es replicable, existen $\omega, \omega' \in \Omega$ tales que $V_{\delta^b}(T)(\omega) < \Lambda(\omega)$ y $V_{\delta^a}(T)(\omega') > \Lambda(\omega')$ y usando (2.12) tenemos que

$$\Pi^b(0, \Lambda) = \frac{1}{1+r}E_Q[V_{\delta^b}(T)] < \frac{1}{1+r}E_Q[\Lambda] < \frac{1}{1+r}E_Q[V_{\delta^a}(T)] = \Pi^a(0, \Lambda),$$

lo que concluye la prueba del teorema. ■

La existencia de los portafolio δ^a y δ^b, que nos garantiza el teorema anterior, sirve para mostrar que los precios *ask* y *bid* no son justos cuando el derivado no es replicable. En efecto, si el precio del derivado es $\Pi^a(0,\Lambda)$, podemos vender el derivado y comprar el portafolio δ^a para tener un balance de 0 en el momento 0. En el momento T el portafolio me cubre el pago del derivado, pero además se tiene un excedente en algún estado $\omega \in \Omega$, el cual tiene probabilidad positiva. Análogamente, si el precio del derivado es $\Pi^b(0,\Lambda)$ tenemos la estrategi contraria que nos permite arbitraje igualmente. Definimo entonces el intervalo

$$F_\Lambda = \left(\Pi^b(0,\Lambda), \Pi^a(0,\Lambda)\right).$$

Proposición 2.16 *Sea Λ un derivado no replicable en un modelo libre de arbitraje. Entonces F_Λ son todos los precios justos del derivado.*

Demostración: Ya vimos que todos lo precios justos están contenidos en F_Λ. Supongamos ahora que π es un precio que permite arbitraje vendiendo el derivado, luego existe un portafolio δ tal que $V_\delta(0) = \pi$ y que además super-replica Λ. Luego $\pi \geq \Pi^a(0,\Lambda)$. De forma similar, si π es un precio que permite arbitraje comprando el derivado, se tiene un portafolio sub-replicante con valor inicial π, luego $\pi \leq \Pi^b(0,\Lambda)$. En cualquier caso $\pi \notin F_\Lambda$. ■

Los problemas (P1) y (D1) del teorema 2.15 también nos dicen que si Q es una medida de riesgo neutral (representada por un punto factible de (D1)), entonces

$$\Pi^b(0,\Lambda) \leq \frac{1}{1+r} E_Q[\Lambda] \leq \Pi^a(0,\Lambda).$$

PROBLEMAS

2.1 Calcule la tasa de retorno esperada de la acción en el modelo binomial bajo la probabilidad real.

2.2 En el modelo binomial, calcule el portafolio que genera $(1+R)C$ en el tiempo T (sin importar el valor de ω) y cuyo valor incial es C. Cuál es el valor de R?

2.3 Suponga que en el mercado existe un costo de transacción de 2% por la compra (únicamente) de acciones. Calcule el portafolio replicante del derecho del ejemplo 2.1 y su precio.

2.4 Considere el modelo binomial de un período con $s = 100$, $u = 1,08$, $r = 0,05$ y $d = 1,02$. La medida de probabilidad real está dada por $P(\{\omega_u\}) = \frac{2}{3}$ y $P(\{\omega_d\}) = \frac{1}{3}$. Suponga además, que se ofrece una opción *call* con precio de ejercicio $K = 105$ a un precio de 2.

a) Encuentre la medida de riesgo neutral Q.
b) Encuentre el precio libre de arbitraje de la opción (denotado por C).
c) ¿Es $C = 2$? De lo contrario, encuentre una estrategia que genere arbitraje.
d) Encuentre una variable aleatoria Z tal que $E_P[Z] = 1$ y para toda variable aleatoria Y (definida en $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$)

$$E_P[ZY] = E_Q[Y].$$

En particular, se tiene que $E_P[Z(S(T)-K)^+] = E_Q[(S(T)-K)^+]$.

2.5 Considere el modelo binomial cuando el activo riesgoso es una tasa de cambio y la tasa de retorno libre de riesgo extranjera es r_f. Encuentre la relación entre u, d, r y r_f para que no haya arbitraje.

2.6 [4] Considere el siguiente mercado: $r = 0$, $s_1 = 220$, $s_2 = 85$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 230 & 210 & 190 \\ 80 & 70 & 90 \end{pmatrix}.$$

Muestre que este mercado permite arbitraje y construya una de estas oportunidades.

2.7 Considere el mismo mercado del ejemplo 2.2 con $r = 0,03$ y una acción adicional con $s_3 = 20$ y $S_3(T) = 1,05s_3$ cuando alguna de las acciones S_1 o S_2 suben de precio y $S_3(T) = 0,95s_3$ de lo contrario.

a) Encuentre la matriz $\mathbf{\Sigma}$ para este modelo.
b) Encuentre una medida de riesgo neutral Q.
c) Es este mercado completo? Si no lo es, encuentre otra medida de riesgo neutral diferente a Q.
d) Calcule el precio de la opción *call* canasta con pesos $w_1 = 0,2$, $w_2 = 0,3$ y $w_3 = 0,5$ y con precio de ejercicio $K = 41$.

2.8 [5] Considere un modelo de un período en el cual el precio de la acción hoy es $s = 100$. En el periodo T el precio puede subir a 110, quedarse en 100 o bajar a 80. El precio de una opción *put* con precio de ejercicio 105 es 7, y el precio de una opción *put* con precio de ejercicio 95 es 3, con ambas opciones venciendo en el periodo T.

a) Encuentre un portafolio que replique un derecho que paga 1 sin importar el estado de la naturaleza en T.
b) ¿Cúal es la tasa de retorno libre de riesgo?
c) Encuentre una medida de riesgo neutral, si existe.
d) Diga si el mercado es completo.

2.9 Muestre que para todo derivado Λ se tiene que $\Pi^b(0,\Lambda) \leq \Pi^a(0,\Lambda)$. Deduzca que si el derivado es replicable ambos precios coinciden.

2.10 Encuentre el intervalo de precios justos del derivado del ejemplo 2.2, pero con $K = 70$.

2.11 Considere un mercado de un período con $r = 0$ y una acción con precio inicial $s_1 = 15$ y en T puede tomar tres posibles valores 10,15 y 20.

a) Muestre que el mercado es libre de arbitraje.
b) Muestre que el mercado no es completo.
c) Sea $\Lambda = \max\{S(T) - 17, 0\}$. Muestre que el precio de Λ puede ser arbitrariamente pequeño pero positivo sin crear oportunidades de arbitraje.

CAPÍTULO 3

MODELO CRR

En este capítulo vamos a describir un modelo simple de mercado financiero en tiempo discreto, construido a partir del modelo binomial de un período de la sección 2.1. Este modelo es conocido como CRR debido a Cox-Ross-Rubinstein.

3.1 Descripción

Consideremos dos activos financieros cuyos precios se observan en los tiempos $t = 0, \ldots, T$, con $T < \infty$ entero, uno de ellos sin riesgo llamado bono y el otro con riesgo llamado acción. El bono, denotado B, tiene una tasa de retorno constante $r \geq 0$ en cada período $(t-1, t]$ y $B(0) = 1$, luego se tiene que

$$B(t) = (1 + r)^t, t = 0, \ldots, T.$$

Por otro lado, el precio de la acción sigue una caminata aleatoria exponencial, esto es un proceso estocástico con $S(0) = s > 0$ y

$$S(t) = S(t-1)X_t, t = 1, \ldots, T,$$

donde $\{X_t : t = 1, \ldots, T\}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $P(X_t = u) = p_u > 0$, $P(X_t = d) = p_d > 0$, $p_u + p_d = 1$ y $0 < d < u$.

Este proceso se puede construir en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ donde $\Omega = \{C, S\}^T$ cuyos elementos son $\omega = (a_1 \ldots a_T)$ con $a_i \in \{C, S\}$ (ver ejercicio A.2) y

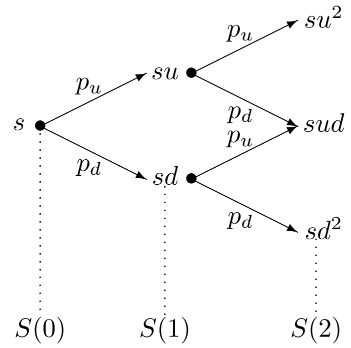

Figura 3.1: Acción en el modelo CRR con $T = 2$

$P(\{\omega\}) = p_u^{C_\omega} p_d^{S_\omega}$ con C_ω el número de C en ω y $S_\omega = T - C_\omega$ el número de S en ω. Puesto que Ω es finito podemos tomar $\mathcal{F}$ como la colección de todos los subconjuntos de Ω. En este espacio podemos definir para $t = 1, \dots, T$

$$X_t(\omega) = \begin{cases} u, & a_t = C \\ d & a_t = S. \end{cases}$$

Si definimos $C_{\omega(t)}$ y $S_{\omega(t)} = t - C_{\omega(t)}$ como el número de C y S, respectivamente, hasta las primeras t componentes de ω, tenemos entonces que $S(t)(\omega) = su^{C_{\omega(t)}} d^{S_{\omega(t)}}$. Podemos ver que el valor de $S(t)$ es el mismo para todos los ω con el misma cantidad de C y S en las primeras t componentes, sin importar el orden, y por lo tanto la cantidad de valores distintos para $S(t)$ es $t + 1$ (ver la figura 3.1). Usando el ejercicio 3.1 tenemos que el valor esperado del retorno de la acción bajo P en el período t es $(up_u + dp_d)^t - 1$. Notemos también que cada ω describe una de las posibles 2^T trayectorias que puede tomar el proceso de precios de la acción (ver la figura 3.2).

Ahora, la filtración generada por el proceso de precios de la acción $\{S(t)\}$ la podemos describir a partir de particiones de Ω. Definimos para $t = 1, \dots, T$ $\mathcal{P}(t) = \{[\omega(t)] : \omega(t) \in \{C, S\}^t\}$ donde $[\omega(t)] = \{\omega \in \Omega :$ las primeras t componentes de ω son $\omega(t)\}$. Así, tenemos que $\mathcal{F}(0) = \{\emptyset, \Omega\}$ y $\mathcal{F}(t) = \sigma(\mathcal{P}(t))$ para $t = 1, \dots, T$. Es claro que $\mathcal{P}(T) = \Omega$ y $\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}$. Por ejemplo, si $T = 3$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(1) &= \{\{CCC, CCS, CSC, CSS\}, \{SCC, SCS, SSC, SSS\}\} \\ \mathcal{P}(2) &= \{\{CCC, CCS\}, \{CSC, CSS\}, \{SCC, SCS\}, \{SSC, SSS\}\}. \end{aligned}$$

3.2 Arbitraje y TFVA1

Debemos ahora definir arbitraje para modelos multiperíodo, lo que implica definir la clase de portafolios que generan arbitraje. En adelante vamos a considerar el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}(t)\}, P)$ con la filtración definida arriba.

Definición 3.1 *Un portafolio es un par de procesos* $\{\delta(t) = (\delta_0(t), \delta_1(t)) : t = 1, \dots, T\}$ *donde* $\delta_0(t)$ *y* $\delta_1(t)$ *representan la cantidad de bonos y acciones, respectivamente, en el intervalo* $(t-1, t]$. *Además, estos procesos son predecibles, esto es,* $\delta(t) \in \mathcal{F}(t-1)$.

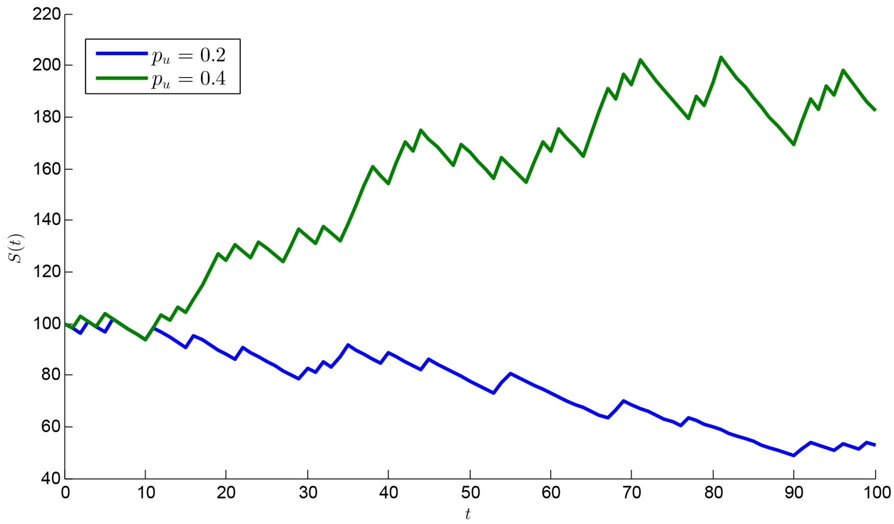

Figura 3.2: Trayectoria del modelo CRR con $s = 100$, $d = 0,98$, $u = 1,05$ y $T = 100$.

La condición de predictibilidad impide que los portafolios anticipen el futuro, es decir, la cantidad de bonos y acciones en el intervalo $(t-1, t]$ solo pueden depender del proceso de precios de la acción observado hasta el tiempo $t-1$. Dado un portafolio δ, el proceso de valor del portafolio está dado por

$$V_\delta(0) := \delta_0(1)B(0) + \delta_1(1)S(0) = \delta_0(1) + \delta_1(1)s \tag{3.1}$$

y para $t = 1, \ldots, T$

$$V_\delta(t) := \delta_0(t)B(t) + \delta_1(t)S(t).$$

Ahora, para que la idea intuitiva de arbitraje de ganancia sin riesgo se cumpla, no se debería introducir, ni sacar dinero del portafolio, es decir, se debe autofinanciar.

Definición 3.2 *Un portafolio δ es autofinanciado si para $i = 1, \ldots, T-1$ se cumple que*

$$V_\delta(t) = \delta_0(t+1)B(t) + \delta_1(t+1)S(t). \tag{3.2}$$

Podemos ahora definir una oportunidad de arbitraje en este modelo.

Definición 3.3 *Un portafolio autofinanciado δ genera arbitraje si para algún $t \in \{1, \ldots, T\}$ se tiene que $V_\delta(0) = 0$, $P(V_\delta(t) \geq 0) = 1$ y $P(V_\delta(t) > 0) > 0$.*

Queremos ahora saber bajo qué condiciones este modelo no permite arbitraje. Una condición necesaria se obtiene de la proposición 2.3, puesto que si no se cumple la condición $d < 1 + r < u$ entonces se puede construir una oportunidad de arbitraje en el primer período y por tanto se tiene arbitraje para todo el modelo. Vamos a ver que esta condición también es suficiente, dando origen al TVFA1 para este modelo. Antes, necesitamos la siguiente definición central en la teoría de mercados financieros.

Definición 3.4 *Una medida de probabilida Q en Ω se llama medida de martigala equivalente si es equivalente a la probabilidad real P y el proceso $\left\{\frac{S(t)}{B(t)}\right\}$ es una martingala bajo Q con respecto a la filtración generada por el proceso de precios de la acción.*

La siguiente es una propiedad muy importante de las medias equivalente de martigalas que nos será útil en el momento de valorar derivados.

Proposición 3.5 *Sea Q una medida equivalente de martingala y δ un portafolio autofinanciado. Entonces el proceso de valor del portafolio descontado $\left\{\frac{V_\delta(t)}{B(t)}\right\}$ es una martingala bajo Q con respecto a la filtración generada por el proceso de precios de la acción.*

Demostración: Sea $\{(\delta_0(t), \delta_1(t))\}$ un portafolio autofinanciado, entonces para $t = 1, \ldots, T-1$

$$
\begin{aligned}
E_Q\left[\left.\frac{V_\delta(t+1)}{B(t+1)}\right|\mathcal{F}(t)\right] &= E_Q[\delta_0(t+1)|\mathcal{F}(t)] + E_Q\left[\left.\delta_1(t+1)\frac{S(t+1)}{B(t+1)}\right|\mathcal{F}(t)\right] \\
&= \delta_0(t+1) + \delta_1(t+1)E_Q\left[\left.\frac{S(t+1)}{B(t+1)}\right|\mathcal{F}(t)\right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(Sacar lo conocido+predecible)} \\
&= \delta_0(t+1) + \delta_1(t+1)\frac{S(t)}{B(t)} \qquad\qquad \text{(Definición de } Q\text{)} \\
&= \frac{1}{B(t)}\left(\delta_0(t+1)B(t) + \delta_1(t+1)S(t)\right) \\
&= \frac{V_\delta(t)}{B(t)}. \qquad\qquad \text{(Autofinanciado)}
\end{aligned}
$$

Para $t = 0$, la condición se obtiene fácilmente por la forma como se define el valor del portafolio en 0. ■

Corolario 3.6 *Si δ es autofinanciado y $V_\delta(t) \geq 0$ c.s., entonces $V_\delta(s) \geq 0$ c.s. para todo $s = 0, \ldots, t$.*

Demostración: De la propiedad 4 en ls sección A.2 se tiene que c.s.

$$
0 \leq E_Q\left[\left.\frac{V_\delta(t)}{B(t)}\right|\mathcal{F}(s)\right] = \frac{V_\delta(s)}{B(s)},
$$

donde la segunda igualdad viene del problema A.6. ■

Recordemos del modelo binomial de un período que las probabilidades definidas en (2.5) son las únicas de riesgo neutral cuando se tiene que $d < 1 + r < u$. Podemos definir la medida Q en Ω usando estas probabilidades q_u y q_d pues éstas satisfacen que $uq_u + dq_d = 1 + r$, lo que garantiza que $E_Q[X_t] = 1 + r$ para todo $t = 1, \ldots, T$. Además, del problema 3.1 se tiene que $E_Q\left[\frac{S(t)}{B(t)}\right] = s$, condición necesaria para que la medida sea equivalente de martingala. En realidad, esta medida lo es.

Proposición 3.7 *Si $d < 1 + r < u$ entonces la medida Q definida arriba es una medida equivalente de martingala.*

Demostración: Es claro que Q es equivalente a P pues $q_u > 0$ y $q_d > 0$. Debemos verificar ahora que el proceso de precios descontado es una martingala verificando las tres condiciones que definen la martingala.

1. Puesto que $S(t)$ toma finitos valores, las variables son integrables.

2. La filtración $\{\mathcal{F}(t)\}$ es la generada por el proceso de precios, luego, por definición, $S(t) \in \mathcal{F}(t)$.

3. Para verificar la última condición vemos que para $t = 0, \ldots, T-1$

$$\begin{aligned} E_Q\left[\left.\frac{S(t+1)}{B(t+1)}\right|\mathcal{F}(t)\right] &= \frac{1}{(1+r)^{t+1}}E_Q[S(t)X_{t+1}|\mathcal{F}(t)] \\ &= \frac{S(t)}{(1+r)^{t+1}}E_Q[X_{t+1}|\mathcal{F}(t)] \qquad \text{(Sacar lo conocido)} \\ &= \frac{S(t)}{(1+r)^{t+1}}E_Q[X_{t+1}] \qquad \text{(Independencia)} \\ &= \frac{S(t)}{(1+r)^{t+1}}E_Q[X_{t+1}](1+r) \\ &= \frac{S(t)}{(1+r)^{t}} = \frac{S(t)}{B(t)}. \end{aligned}$$

■

Notemos que, al igual que en el modelo de un periódo, la medida Q es la única medida que satisface $uq_u + dq_d = 1 + r$, luego esta es la única medida equivalente de martingala para este modelo. Podemos ahora probar el TFVA1 para este modelo de mercado financiero.

Teorema 3.8 *El modelo es libre de arbitraje si y solo si existe una medida equivalente de martingala.*

Demostración: Si el modelo es libre de arbitraje entonces se tiene la condición $d < 1 + r < u$ y por la proposición 3.7 se tiene la existencia de la medida. Supongamos ahora que existe una medida equivalente de martingala Q, y sea δ un portafolio autofinanciado tal que para algún t se tiene que $P(V_\delta(t) \geq 0) = 1$ y $P(V_\delta(t) > 0) > 0$. Puesto que Q es equivalente a P, entonces se que $Q(V_\delta(t) \geq 0) = 1$ y $Q(V_\delta(t) > 0) > 0$, y por lo tanto $E_Q[V_\delta(t)] > 0$. Ahora, por la proposición 3.5 y el problema A.6 tenemos que

$$0 < E_Q\left[\frac{V_\delta(t)}{B(t)}\right] = \frac{V_\delta(0)}{B(0)} = V_\delta(0),$$

luego no hay arbitraje. ■

3.3 Valoración de derivados europeos

Definición 3.9 *Un derivado de tipo europeo Λ es una variable aleatoria definida en Ω que es $\mathcal{F}(T)$-medible. Este derivado es replicable si existe un portafolio autofinanciado tal que $V_\delta(T) = \Lambda$ c.s.*

El problema 3.5 muestra que cuando el modelo es libre de arbitraje, dos portafolios que tengan el mismo valor en T, sus procesos de valor van a coincidir en todos los tiempos. Esto sugiere que el proceso de precios de un derivado replicable Λ debe satisfacer para todo $t = 0, \ldots, T$

$$\Pi(t, \Lambda) = V_\delta(t), \tag{3.3}$$

donde δ es un portafolio replicante del derivado. Usando la proposición 3.5, esto implica que

$$\begin{aligned}\Pi(t,\Lambda) &= V_\delta(t)\\ &= B(t)\frac{V_\delta(t)}{B(t)}\\ &= B(t)E_Q\left[\frac{V_\delta(T)}{B(T)}\middle|\mathcal{F}(t)\right] \qquad (3.4)\\ &= \frac{B(t)}{B(T)}E_Q[\Lambda|\mathcal{F}(t)], \qquad (3.5)\end{aligned}$$

y en particular para $t = 0$ se tiene que

$$\Pi(0,\Lambda) = \frac{1}{B(T)}E_Q[\Lambda].$$

De los anteriores cálculos podemos concluir varias cosas importantes:

- El proceso de precios del derivado es un proceso adaptado, es decir, $\Pi(t,\Lambda) \in \mathcal{F}(t)$ para todo $t = 0,\ldots,T$. Esto implica que $\Pi(t,\Lambda)$ es constante en los eventos de la partición $\mathcal{P}(t)$, es decir, toma el mismo valor en todos los $\omega \in \Omega$ que tengan las mismas primeras t componentes, los cuales los definimos como los conjuntos $[\omega(t)]$ con $\omega(t) \in \{C,S\}^t$.

- Si sustituimos $t+1$ en lugar de T en (3.4) tenemos que

$$\Pi(t,\Lambda) = \frac{1}{1+r}E_Q[V_\delta(t+1)|\mathcal{F}(t)] = \frac{1}{1+r}E_Q[\Pi(t+1,\Lambda)|\mathcal{F}(t)],$$

  y encontramos una fórmula recursiva hacia atrás para calcular el precio del derivado en el conjunto $[\omega(t)]$ con $\omega(t) \in \{C,S\}^t$ como

$$\Pi(t,\Lambda)([\omega(t)]) = \frac{1}{1+r}\left[q_u\Pi(t+1,\Lambda)([\omega(t)C]) + q_d\Pi(t+1,\Lambda)([\omega(t)S])\right], \qquad (3.6)$$

  iniciando la recursión con $\Pi(T,\Lambda)(\omega) = \Lambda(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.

- Si δ es un portafolio replicante entonces cumple que $\delta(t+1) \in \mathcal{F}(t)$ y es constante en los conjuntos $[\omega(t)]$ con $\omega(t) \in \{C,S\}^t$. Puesto que se debe satisfacer (3.3), en particular, en los conjuntos $[\omega(t)C]$ y $[\omega(t)S]$ tenemos que este portafolio es único y está dado por las fórmulas (comparar con las ecuaciones (2.6))

$$\delta_1(t+1)([\omega(t)]) = \frac{\Pi(t+1,\Lambda)([\omega(t)C]) - \Pi(t+1,\Lambda)([\omega(t)S])}{S(t)([\omega(t)])(u-d)} \qquad (3.7)$$

$$\delta_0(t+1)([\omega(t)]) = \frac{u\Pi(t+1,\Lambda)([\omega(t)S]) - d\Pi(t+1,\Lambda)([\omega(t)C])}{(1+r)^{t+1}(u-d)}. \qquad (3.8)$$

- De las ecuaciones (3.3), (3.6), (3.7) y (3.8), podemos verificar que el portafolio replicante es en realidad autofinanciado.

De todo lo anterior podemos concluir tambin el siguiente resultado.

Teorema 3.10 *El modelo CRR con $d < 1+r < u$ es un modelo completo.*

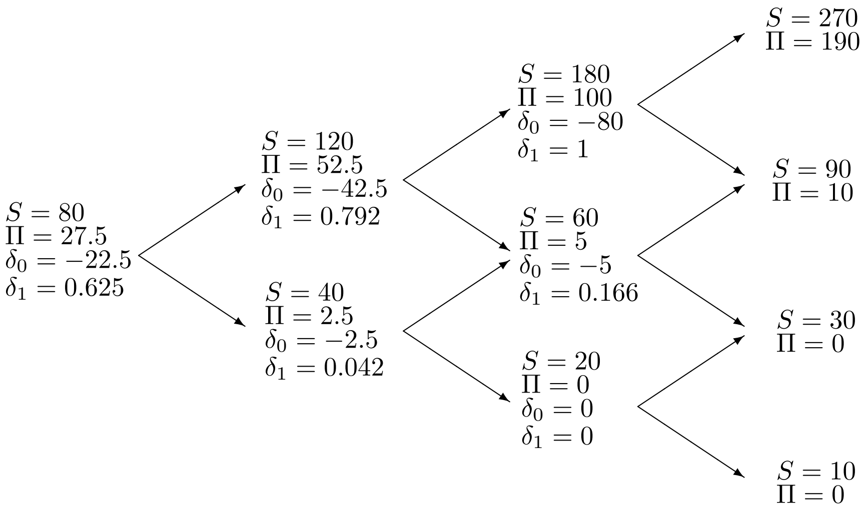

Figura 3.3: Precios de la acción y del derivado, y el portafolio replicante del ejemplo 3.1

EJEMPLO 3.1

Consideremos un modelo con $T = 3$, $r = 0$, $s = 80$, $u = 1,5$ y $d = 0,5$. De esta forma los valores $q_u = q_d = \frac{1}{2}$ generan la medida equivalente de martingala. Vamos a encontrar un portafolio replicante para una opción *call* con $K = 80$, y su valor en cada estado. (Cuando $K = s$ se dice que la opción está *at the money*.) La figura 3.3 muestra el precio de la acción, el precio del derivado y el portafolio replicante en cada uno de los estados del modelo, calculados usando las ecuaciones (3.6)-(3.8)

Cuando el derivado está dado a través de una función de pago de la foma $\Lambda = f(S(T))$, como es el caso del ejemplo 3.1, la ecuación (3.5) tiene una fórmula explícita conocida como la fórmula de Cox-Ross-Rubinstein. En este caso el valor del derivado solo depende del precio de la acción en el timeo T, sin importar la trayectoria del precio, y además el número de trayectorias ω que tienen $C_\omega = k$ es $\binom{T}{k}$ para $k = 0, \ldots, T$. Así, tenemos que el precio del derivado en $t = 0$ es

$$\begin{aligned}
\Pi(0, \Lambda) &= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{\omega \in \Omega} Q(\{\omega\}) f\left(S(T)(\omega)\right) \\
&= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{k=0}^{T} Q(\{\omega \in \Omega : C_\omega = k\}) f\left(su^k d^{T-k}\right) \\
&= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{k=0}^{T} \binom{T}{k} q_u^k q_d^{T-k} f(su^k d^{T-k}).
\end{aligned}$$

Para cualquier t, podemos usar la ecuación (3.5) para calcular el precio del derivado. Si $S(t)(\omega(t)) = z$,usando la proposición A.5 tenemos

$$\begin{aligned}
\Pi(t,\Lambda)([\omega(t)]) &= \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \sum_{k=C_{\omega(t)}}^{T} \frac{Q(\{\omega \in [\omega(t)] : C_\omega = k\})}{Q([\omega(t)])} f\left(su^k d^{T-k}\right) \\
&= \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \sum_{j=0}^{T-t} \binom{T-t}{j} \frac{q_u^{C_{\omega(t)}+j} q_d^{T-C_{\omega(t)}-j}}{q_u^{C_{\omega(t)}} q_d^{t-C_{\omega(t)}}} f\left(zu^j d^{T-t-j}\right) \\
&= \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \sum_{j=0}^{T-t} \binom{T-t}{j} q_u^j q_d^{T-t-j} f(zu^j d^{T-t-j}).
\end{aligned}$$

Usemos ahora la fórmula de CRR para calcular el precio en $t = 0$ de una opción *call* europea con precio de ejercicio K y tiempo de maduración T. Recordemos que la función de pago de esta opción es $c(S) = \max\{S - K, 0\}$. Si definimos el entero $D := \min\{i : su^i d^{T-i} > K\}$, entonces

$$c(su^k d^{T-k}) = \begin{cases} su^k d^{T-k} - K, & k \geq D \\ 0 & k < D. \end{cases}$$

Si $D > T$, entonces $S(T) < K$ c.s. y el precio de la opción debe ser 0. Supongamos que $D \leq T$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\Pi(0,\Lambda) &= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{k=D}^{T} \binom{T}{k} q_u^k q_d^{T-k} (su^k d^{T-k} - K) \\
&= \frac{s}{(1+r)^T} \sum_{k=D}^{T} \binom{T}{k} q_u^k q_d^{T-k} u^k d^{T-k} - \frac{K}{(1+r)^T} \sum_{k=D}^{T} \binom{T}{k} q_u^k q_d^{T-k} \\
&= s \sum_{k=D}^{T} \binom{T}{k} \left(q_u \frac{u}{1+r}\right)^k \left(q_d \frac{d}{1+r}\right)^{T-k} - \frac{K}{(1+r)^T} \sum_{k=D}^{T} \binom{T}{k} q_u^k q_d^{T-k}.
\end{aligned}$$

Notemos que $q'_u := q_u \frac{u}{1+r}$ y $q'_d := q_d \frac{d}{1+r}$ suman 1. Del ejemplo A.2 tenemos entonces que

$$\Pi(0,\Lambda) = s(1 - B(D-1; T, q'_u)) - \frac{K}{(1+r)^T}(1 - B(D-1; T, q_u)). \tag{3.9}$$

3.3.1 Derivados que dependen de la trayectoria

Algunos derivados (usualmente denomiando exóticos) no solo dependen del precio de la acción en el tiempo de maduración sino de toda la trayectoria de precios. En este caso la fórmula CRR no aplica, pero todas las ecuaciones (3.6)-(3.8) siguen siendo válidas.

EJEMPLO 3.2

Consideremos el mismo modelo del ejemplo 3.1 con el derivado $\Lambda = \max_t S(t)$. Entonces

$$\begin{array}{llll} \Lambda(CCC) = 270 & \Lambda(CCS) = 180 & \Lambda(CSC) = 120 & \Lambda(CSS) = 120 \\ \Lambda(SCC) = 90 & \Lambda(SCS) = 80 & \Lambda(SSC) = 80 & \Lambda(SSS) = 80. \end{array}$$

Usando la fórmula recursiva (3.6) tenemos que

$$\begin{array}{ll} \Pi(2,\Lambda)(CC) = 225 & \Pi(2,\Lambda)(CS) = 120 \\ \Pi(2,\Lambda)(SC) = 85 & \Pi(2,\Lambda)(SS) = 80 \\ \Pi(1,\Lambda)(C) = 172,5 & \Pi(1,\Lambda)(S) = 82,5. \end{array}$$

Finalmente, tenemos que $\Pi(0,\Lambda) = E_Q[\max_t S(t)] = 127,5$. Igualmente, usando las ecuaciones (3.7) y (3.8) tenemos que

$$\begin{array}{llll} \delta_1(3)(CC) = 0,5 & \delta_1(3)(CS) = 0 & \delta_1(3)(SC) = 0,166 & \delta_1(3)(SS) = 0 \\ \delta_0(3)(CC) = 135 & \delta_0(3)(CS) = 120 & \delta_0(3)(SC) = 75 & \delta_0(3)(SS) = 80 \\ \delta_1(2)(C) = 0,875 & \delta_0(2)(C) = 67,5 & \delta_1(2)(S) = 0,125 & \delta_0(2)(S) = 77,5 \\ & \delta_1(1) = 1,125 & \delta_0(1) = 37,5. & \end{array}$$

3.4 Valoración de derivados americanos

Hasta ahora hemos estudiado derivados que se ejercen en el tiempo de maduración T, que llamamos del tipo europeo. Por el contrario, un derivado de tipo americano es un derivado que le permite al poseedor ejercerlo en cualquier momento anterior o igual al tiempo de maduración, y el pago recibido al momento de ejercer el derivado depende tanto del tiempo de ejercicio como del proceso de precios de la acción hasta el momento de ejercerlo.

Definición 3.11 *Un derivado de tipo americano es un proceso estocástico no-negativo adaptado* $\{\Lambda(t) : t = 0, \ldots, T\}$*, donde* $\Lambda(t)$ *es el pago del derivado si se ejerce en el tiempo* t*.*

El poseedor del derivado puede ejercerlo en cualquier momento $\tau \leq T$, donde τ es una variable aleatoria, es decir, el tiempo de ejercicio depende de la trayectoria del proceso de precios de la acción, pero la decisión de ejercer el derivado o no en un momento dado t solo puede depender de la trayectoria del proceso de precios hasta ese momento. Esto implica que τ debe ser un tiempo de parada con respecto a la filtración generada por $\{S(t)\}$ (ver definición A.9).

EJEMPLO 3.3

Considere el modelo del ejemplo 3.1 y se τ el primer momento en que el proceso de precios de la acción alcanza su máximo, es decir, $\tau(\omega) = \min\{t : S(t)(\omega) \geq S(s)(\omega)$, para todo $s\}$. Dado un instante de tiempo, saber si el proceso es máximo en ese instante requiere saber el comportamiento del proceso en el futuro, luego τ no es un tiempo de parada. En efecto, el valor de τ para cada trayectoria es el siguiente:

$$\begin{array}{llll} \tau(CCC) = 3 & \tau(CCS) = 2 & \tau(CSC) = 1 & \tau(CSS) = 1 \\ \tau(SCC) = 3 & \tau(SCS) = 0 & \tau(SSC) = 0 & \tau(SSS) = 0, \end{array}$$

y tenemos entonces que $\{\tau = 1\} = \{CSC, CSS\} \notin \mathcal{F}(1)$.

PROBLEMAS

3.1 Muestre que para $t = 0, \ldots, T$ se tiene que $E_P[S(t)] = s(up_u + dp_d)^t$.

3.2 Simular 5000 veces las variables $S(10)$, $S(50)$ y $S(100)$ del modelo CRR con $p_u = p_d = 0,5$, $u = 1,05$, $d = \frac{1}{u}$ y $s = 20$. Calcular la media muestral en cada caso y comparar con el valor del ejercicio anterior. En cada caso haga un histograma de $\ln\left(\frac{S(t)}{s}\right)$ con 10, 50 y 100 intervalos respectivamente.

3.3 Muestre que un portafolio δ es autofinanciado si y solo si para $t = 1, \ldots, T$ se tiene que $\Delta V_\delta(t) = \delta_0(t)\Delta B(t) + \delta_1(t)\Delta S(t)$, donde $\Delta X(t) = X(t) - X(t-1)$ para todo proceso X.

3.4 Si en el modelo hay un costo de transacción de λS cada vez que la acción se vende o se compra ¿cuál es la condición de autofinanciamiento para un portafolio δ?

3.5 Suponga que $d < 1 + r < u$. Muestre que si dos portafolios autofinanciados δ y δ' satisfacen que $V_\delta(T) = V_{\delta'}(T)$ c.s., entonces para todo $t = 0, \ldots, T$ se tiene que $V_\delta(t) = V_{\delta'}(t)$ c.s. (Ayuda: Use el corolario 3.6).

3.6 Considere el modelo descrito en el problema 3.2 con $r = 0.01$. Calcule $\Pi(0, \Lambda)$ para Λ una opción *call* europea con precio de ejercicio $K = 22$ y tiempo de maduración $T = 100$. Haga una gráfica de $\Pi(t, \Lambda)$ y $\delta_1(t+1)$ variando sobre los diferentes valores de $S(t)$, para $t = 9, 49, 99$.

3.7 [6] En un grupo de amigos, uno de ellos, Pedro, propone el siguiente juego: Él lanza una moneda, si cae cara él paga \$3, si cae sello no paga nada; jugar el juego cuesta \$1. Se pueden jugar las veces que uno quiera y apostar cualquier cantidad de dinero. A usted se le ocurre otro juego: Si Pedro lanza la moneda tres veces y caen dos o más caras, usted paga \$27, de lo contrario no paga nada.

a) ¿Cuánto debería cobrar por ese juego? (Ayuda: Piense en un modelo CRR, ¿cuánto es u, d y r?)

b) ¿Cómo replicaría su juego?

3.8 [6] La opción *As you like it* es una opción que permite decidir en el tiempo $t < T$ entre una opción *call* y una opción *put* que maduran en T y tienen el mismo precio de ejecución K.

a) Calcule el precio de esta opción en el tiempo 0 en un modelo CRR con $s = 200$, $u = 1.5$, $d = 0.5$, $r = 0$, $K = 225$, $t = 1$ y $T = 3$.

b) Muestre que el precio está dado por $C(K, T) + P(K', t)$ donde $K' = \frac{KB(t)}{B(T)}$, $C(K, t)$ es el precio en tiempo 0 de una opción *call* con precio de ejercicio K y tiempo de maduración t, y similarmente para $P(K, t)$ con una opción *put*. (Ayuda: Use la paridad *put-call*.)

3.9 Considere una opción *call* binaria con precio de ejercicio K y tiempo de maduración T, la cual paga 1 si $S(T) > K$ y 0 de lo contrario. Una opción *put* binaria paga 1 menos lo que paga una *call*.

a) Calcule el precio en $t = 0$ de la opción *call* binaria en términos de la función de distribución de una binomial.

b) Muestre que el precio de una opción *call* binaria sumado al precio de una opción *put* binaria es $\frac{1}{(1+r)^T}$ y deduzca el valor de la opción *put* binaria.

3.10 Considere el modelo CRR con $d < 1 + r < u$ y T períodos.

a) Sea $\Pi(t, \Lambda)$ el precio en el tiempo t de una *call* europea con tiempo de maduración T y precio de ejercicio K. Use inducción hacia atrás para mostrar que para todo t se tiene que

$$\Pi(t, \Lambda) \geq \max\{S(t) - K, 0\}.$$

b) Asuma que $r = 0$ y sea $\Pi(t, \Lambda)$ el precio en el tiempo t de una *put* europea con tiempo de maduración T y precio de ejercicio K. Muestre que para todo t se tiene que

$$\Pi(t, \Lambda) \geq \max\{K - S(t), 0\}.$$

CAPÍTULO 4

MODELO DE BLACK-SCHOLES

En este capítulo usaremos el modelo en tiempo discreto visto en la sección anterior para construir el modelo en tiempo continuo de Black-Scholes con algunos argumentos heurísticos con el fin de usar agumentos de cálculo estocástico, fuera del alcance este libro. Además, veremos la fórmula de Black-Scholes para valorar opciones *call* y la ecuación de Black-Scholes para valorar cualquier derivado de tipo europeo.

4.1 Construcción del modelo

Puesto que este modelo se construye a partir del modelo CRR, el modelo consiste de un activo sin riesgo, llamado bono, y un activo con riesgo denominado acción. Empecemos por construir el proceso de precios de la acción en el intervalo $[0, T]$ y para esto dividimos el intervalo en N pedazos. Con esto, definimos el proceso de precios en los tiempos $t = 0, \tau, 2\tau, \ldots, T$, con $\tau = \frac{T}{N}$, como $S(0) = s > 0$ y $S(n\tau) = S((n-1)\tau)X_n$ donde $\{X_n : n = 1, \ldots, N\}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) con $P(X_n = u) = P(X_n = d) = \frac{1}{2}$ y $0 < d < u$. Puesto que $X_n > 0$, podemos encontrar variables aleatorias iid K_n tal que $X_n = e^{K_n}$, y de esta forma

$$S(n\tau) = se^{K_1+\cdots+K_n}.$$

Un par de parámetros que van a definir el modelo son

$$m := E[K_1 + \cdots + K_N] = NE[K_1] = \frac{N}{2}(\ln u + \ln d), \tag{4.1}$$

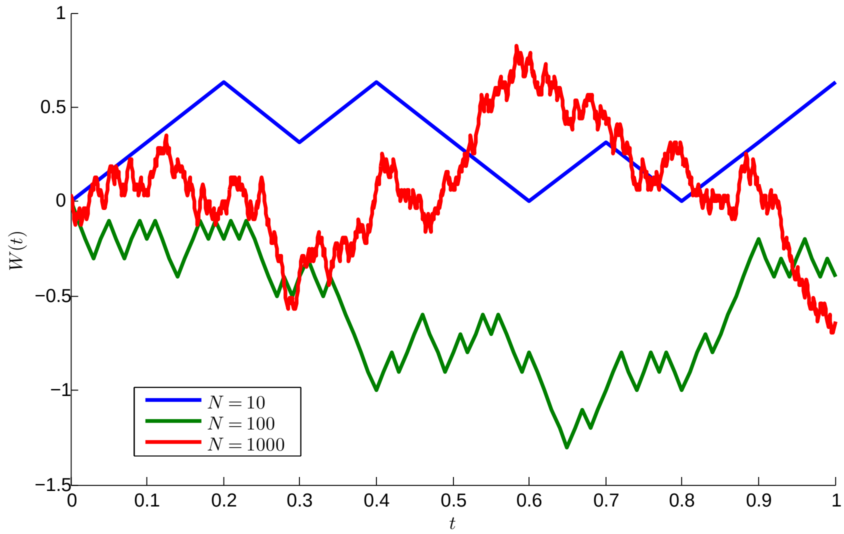

Figura 4.1: Trayectoria de la caminata aleatoria para diferentes valores de N y $T = 1$.

luego $E[K_1] = m\tau$, y

$$\sigma^2 := \text{Var}(K_1 + \cdots + K_N) = N\text{Var}(K_1) = \frac{N}{2}\left((\ln u - m\tau)^2 + (\ln d - m\tau)^2\right). \quad (4.2)$$

De las ecuaciones (4.1) y (4.2) tenemos que $\ln u = m\tau + \sigma\sqrt{\tau}$ y $\ln d = m\tau - \sigma\sqrt{\tau}$, luego podemos definir $K_n = m\tau + \sigma\zeta_n$, donde $\{\zeta_n : n = 1, \ldots, N\}$ son variables aleatorias iid con $P(\zeta_n = \sqrt{\tau}) = P(\zeta_n = -\sqrt{\tau}) = \frac{1}{2}$. Notemos que $E[\zeta_n] = 0$ y $\text{Var}(\zeta_n) = \tau$. Tenemos entonces que $S(n\tau) = se^{mn\tau + \sigma(\zeta_1 + \cdots + \zeta_n)}$, lo que motiva la definición del proceso $\{W(n\tau) : n = 0, \ldots, N\}$ como $W(0) = 0$ y $W(n\tau) = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i$, para $n = 1, \ldots, N$. Este proceso se conoce como una caminata aleatoria y la figura 4.1 muestra una trayectoria para diferentes valores de τ y por tanto de N. Este proceso además satisface la siguiente proposición, cuya demostración se pide en los problemas.

Proposición 4.1 *El proceso $\{W(n\tau)\}$ es una martingala con respecto a su filtración generada. Además, $E[W(n\tau)] = 0$ y Var$(W(n\tau)) = n\tau$ para todo n.*

Así, vemos que el proceso de precios de la acción está definido para $t = 0, \tau, 2\tau, \ldots, T$ como

$$S(t) = se^{mt + \sigma W(t)}. \quad (4.3)$$

Ahora, consideremos N grande, lo que implica que τ es muy pequeño y por tanto las variables K_n también lo son. Entonces, usando una aproximación de Taylor y despreciando los términos más pequeños que τ, obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{S(n\tau)}{S((n-1)\tau)} &= e^{K_n} \\ &\approx 1 + K_n + \frac{1}{2}K_n^2 \\ &= 1 + m\tau + \sigma\zeta_n + \frac{1}{2}m^2\tau^2 + m\sigma\tau\zeta_n + \frac{1}{2}\sigma^2\tau \\ &\approx 1 + \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \sigma\zeta_n \\ &= 1 + \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \sigma\left[W(n\tau) - W((n-1)\tau)\right].\end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir que para $t = 0, \tau, 2\tau, \ldots, (N-1)\tau$ se tiene

$$\begin{aligned}\Delta S(t) &= S(t+\tau) - S(t) \\ &\approx S(t)\left(\left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \sigma\Delta W(t)\right) \\ &= S(t)\left(\mu\Delta t + \sigma\Delta W(t)\right),\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde llamamos $\mu = m + \frac{1}{2}\sigma^2$ y $\Delta t = \tau$. Encontramos entonces lo que será la ecuación diferencial estocástica que define el proceso de precios de la acción en el modelo de Black-Scholes.

Recordemos que nuestro objetivo es definir un proceso en tiempo continuo. Sea $t \in [0, T]$ con $t = n\tau$ para algún $\tau > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\frac{W(t)}{\sqrt{t}} = \frac{\frac{\zeta_1}{\sqrt{\tau}} + \cdots + \frac{\zeta_n}{\sqrt{\tau}}}{\sqrt{n}}.$$

Si hacemos $n \to \infty$ y $\tau \to 0$ de tal forma que $n\tau = t$, el teorema del límte central A.3 y la proposición 4.1 nos dicen que $\dfrac{W(t)}{\sqrt{t}}$ converge en distribución a una $N(0,1)$, o equivalentemente $W(t)$ converge en distrubución a una $N(0,t)$. Este argumento no formal sugiere la existencia del proceso estocástico en tiempo continuo llamado movimiento browniano o proceso de Wiener, que se define de la siguiente forma

Definición 4.2 *Un proceso estocástico en tiempo continuo* $\{W(t) : t \geq 0\}$ *es un movimiento browniano si cumple que*

1. $W(0) = 0$.
2. *Tiene incrementos independientes: Dados* $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$*, las variables* $W(t_n) - W(t_{n-1}), \ldots, W(t_2) - W(t_1), W(t_1)$ *son independientes.*
3. *Incrementos normales estacionarios: Dados* $t \geq 0$ *y* $h > 0$*,* $W(t+h) - W(t)$ *se distribuye* $N(0,h)$.
4. *Tienes trayectorias continuas c.s.*

La existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ donde tal proceso existe, además de muchas de las interesantes propiedades del movimiento browniano se pueden consultar en [8]. Por ejemplo, se cumplen las propiedades análogas a la proposición 4.1 pues de la definición del movimiento browniano tenemos el resultado sobre la medeia y la varianza. Ahora, para mostrar la propiedad de martingala con respecto a la filtración generada por el movimiento browniano debemos mostrar (comparar con la definición A.8) que para $s > t$ se tiene que $E[W(s)|\mathcal{F}(t)] = W(t)$. Esto resulta inmediato de la propiedad de incrementos independientes y normalmente distribuidos del movimiento browniano pues

$$\begin{aligned} E[W(s)|\mathcal{F}(t)] &= E[W(s) - W(t) + W(t)|\mathcal{F}(t)] \\ &= E[W(s) - W(t)|\mathcal{F}(t)] + W(t) \\ &= E[W(s) - W(t)] + W(t) = W(t). \end{aligned}$$

Es importante anotar que la escogencia inicial del intervalo $[0, T]$ fue realmente irrelevante y por tanto podemos definir el proceso de precios de la acción para todo $t \geq 0$. De la ecuación (4.3) tenemos entonces que este proceso satisface que

$$S(t) = se^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)} \tag{4.5}$$

el cual se llama un movimiento browniano geométrico. Además, de la ecuación (4.4) tenemos que este proceso es la solución a la ecuación diferencial estocástica

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)),\ S(0) = s, \tag{4.6}$$

cuya interpretación precisa y formal requiere el estudio de la integral estocástica, que también se puede consultar en [8]. Notemos que la variable aleatoria $S(t)$ cumple que $\ln\left(\frac{S(t)}{s}\right)$ tiene una distribución normal (comparar con el problema 3.2), y usando el problema 4.2 se puede mostrar que $E[S(t)] = e^{\mu t}$.

Finalmente, el proceso de precios del bono en el modelo de Black-Scholes está dado por

$$B(t) = e^{rt},$$

para todo $t \geq 0$ y $r \geq 0$ fijo.

4.2 Medida de martingala equivalente

Queremos ahora responder la pregunta de cuándo este modelo es libre de arbitraje. Aunque no vamos a definir formalmente una oportunidad de arbitraje para este modelo, daremos un argumento informal para responder esta pregunta. Volvamos al modelo CRR con $\tau = \frac{T}{N}$, y por tanto $u = e^{m\tau + \sigma\sqrt{\tau}}$, $d = e^{m\tau - \sigma\sqrt{\tau}}$ y el retorno del activo libre de riesgo dado por $e^{r\tau}$. Sabemos que el modelo es libre de arbitraje si y solo si tiene que $u > e^{r\tau} > d$, es decir si y solo si $m\tau + \sigma\sqrt{\tau} > r\tau > m\tau - \sigma\sqrt{\tau}$, que es equivalente a que $m + \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} > r > m - \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}$. Vemos que sin importar los valores de m y σ, esta relación siempre se cumple para un τ suficientemente pequeño. Esto sugiere que

el modelo de Black-Scholes es simpre libre de arbitraje

y por tanto

siempre existe una medida de martingala equivalente.

El objetivo ahora es construir esta medida a partir de la medida del modelo discreto. Para esto, recordemos que bajo la medida de martingala equivalente Q se tiene que

$$Q(\zeta_n = \sqrt{\tau}) = q_u = \frac{e^{r\tau} - d}{u - d} = \frac{e^{(r-m)\tau} - e^{-\sigma\sqrt{\tau}}}{e^{\sigma\sqrt{\tau}} - e^{-\sigma\sqrt{\tau}}}.$$

Usando una aproximación de Taylor hasta los términos de orden $\tau^{3/2}$ tenemos que

$$\begin{aligned} q_u &\approx \frac{1 + (r-m)\tau - (1 - \sigma\sqrt{\tau} + \frac{1}{2}\sigma^2\tau - \frac{1}{6}\sigma^3\tau^{3/2})}{(1 + \sigma\sqrt{\tau} + \frac{1}{2}\sigma^2\tau + \frac{1}{6}\sigma^3\tau^{3/2}) - (1 - \sigma\sqrt{\tau} + \frac{1}{2}\sigma^2\tau - \frac{1}{6}\sigma^3\tau^{3/2})} \\ &= \frac{\sigma\sqrt{\tau} - (m - \frac{1}{2}\sigma^2 - r)\tau + \frac{1}{6}\sigma^3\tau^{3/2}}{2(\sigma\sqrt{\tau} + \frac{1}{6}\sigma^3\tau^{3/2})} \\ &= \frac{\sigma - (m - \frac{1}{2}\sigma^2 - r)\sqrt{\tau} + \frac{1}{6}\sigma^3\tau}{2\sigma(1 + \frac{1}{6}\sigma^2\tau)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{\tau} + O(\tau^{3/2}), \end{aligned}$$

donde la última igualdad resulta de separar el lado izquierdo en tres sumandos y $O(\tau^{3/2})$ es un término que al dividir por $\tau^{3/2}$ y hacer $\tau \to 0$ el resultado es una constante. El término $b := \frac{\mu - r}{\sigma}$ es conocido como el precio de mercado del riesgo. Por otro lado tenemos que una aproximación de Taylor similar a la anterior produce que

$$\frac{1}{2}e^{-b\sqrt{\tau} - \frac{1}{2}b^2\tau} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2}b\sqrt{\tau} + O(\tau^{3/2}),$$

con el término $O(\tau^{3/2})$ con las mismas características del anterior. De lo anterior podemos concluir que

$$q_u \approx \frac{1}{2}e^{-b\sqrt{\tau} - \frac{1}{2}b^2\tau}$$

y con un análisis similar que

$$Q(\zeta_n = -\sqrt{\tau}) = q_d \approx \frac{1}{2}e^{b\sqrt{\tau} - \frac{1}{2}b^2\tau}.$$

Ahora, denotemos $W_N(n\tau)$ la caminata aleatoria con N perídos (para no confundir con $W(t)$ el movimiento browniano). Si $\omega \in \{C, S\}^N$, bajo la medida real P se tiene que $P(\{\omega\}) = 2^{-N}$ y bajo la medida de martingala equivalente Q

$$\begin{aligned} Q(\{\omega\}) = q_u^{C_\omega} q_d^{S_\omega} &\approx 2^{-N} \exp\left(-bW_N(T)(\omega) - \frac{1}{2}b^2T\right) \\ &= P(\{\omega\}) \exp\left(-bW_N(T)(\omega) - \frac{1}{2}b^2T\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dada una variable Y definida en $\{C, S\}^N$, el valor esperado bajo la medida del lado izquierdo de (4.7) es $E_Q[Y]$. En cambio si tomamos valor esperado bajo la medida del lado derecho de (4.7) se obtiene $E_P[Ye^{-bW_N(T) - \frac{1}{2}b^2T}]$, lo que sugiere la siguiente definición de medida de martingala equivalente para el modelo de Black-Scholes:

Definición 4.3 *Dado $\{W(t)\}$ movimiento browniano definido en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $T > 0$, definimos la variable aleatoria $Z = e^{-bW(T)-\frac{1}{2}b^2T}$ y la medida Q tal que para toda variable aleatoria $Y \in \mathcal{F}$ se cumple que*

$$E_Q[Y] = E_P[YZ] \tag{4.8}$$

En el problema 2.4.d ya habíamos visto que la medida de riesgo neutral se podía definir a través de una variable Z, como en la ecuación (4.8). El siguiente teorema nos garantiza que en realidad esta medida Q es la que buscamos y el numeral 4 se puede ver como un caso particular del teorema de Girsanov (ver [9]).

Teorema 4.4 *Sea Q como en la definición 4.3. Entonces*

1. *Q es una medida de probabilidad.*

2. *Q es equivalente a P.*

3. *$E_Q[S(t)] = se^{rt}$.*

4. *El proceso $\tilde{W}(t) = bt + W(t)$ para $0 \leq t \leq T$ es un movimiento browniano bajo Q.*

Demostración:

1. Para esto debemos ver que $1 = Q(\Omega) = E_Q[1] = E_P[Z]$. Ahora, como $-\frac{1}{2}b^2T - bW(T)$ se distribuye $N(-\frac{1}{2}b^2T, b^2T)$, entonces por el problema 4.2 se tiene que $E_P[Z] = 1$.

2. Puesto que $Z > 0$ c.s., dado $A \in \mathcal{F}$ se tiene que $Q(A) = E_P[Z1_A] = 0$ si y solo si $P(A) = 0$.

3. De la ecuación (4.5) y la propiedad de incrementos independientes y normales tenemos que

$$\begin{aligned}
E_Q[S(t)] &= E_P\left[Zse^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W(t)}\right] \\
&= se^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t-\frac{1}{2}b^2T}E_P\left[e^{\sigma W(t)-bW(T)}\right] \\
&= se^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t-\frac{1}{2}b^2T}E_P\left[e^{\sigma W(t)-b(W(T)-W(t)+W(t))}\right] \\
&= se^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t-\frac{1}{2}b^2T}E_P\left[e^{(\sigma-b)W(t)}\right]E_P\left[e^{-b(W(T)-W(t))}\right] \\
&= se^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t-\frac{1}{2}b^2T}e^{\frac{1}{2}(\sigma-b)^2t}e^{\frac{1}{2}b^2(T-t)} \\
&= se^{(\mu-\sigma b)t} = se^{rt}.
\end{aligned}$$

4. Es claro que $\tilde{W}(0) = 0$ y que $\tilde{W}(t)$ es continuo c.s. bajo Q por 2. Sean $t \geq 0$ y $h > 0$ con $t + h \leq T$, para mostrar que $Y = \tilde{W}(t+h) - \tilde{W}(t)$ se distribuye $N(0, h)$ bajo Q mostraremos que la función generadora de momentos de Y es la apropiada

(ver problema A.3). Procediendo como arriba con $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned}
E_Q\left[e^{\lambda Y}\right] =& E_P\left[Ze^{\lambda(bh+W(t+h)-W(t))}\right] \\
=& e^{-\frac{1}{2}b^2T+\lambda bh}E_P\left[e^{\lambda(W(t+h)-W(t))-bW(T)}\right] \\
=& e^{-\frac{1}{2}b^2T+\lambda bh}E_P\left[e^{-b(W(T)-W(t+h))}\right]E_P\left[e^{(\lambda-b)(W(t+h)-W(t))}\right] \\
& \cdot E_P\left[e^{(-bW(t)}\right] \\
=& e^{-\frac{1}{2}b^2T+\lambda bh}e^{\frac{1}{2}b^2(T-t-h)}e^{\frac{1}{2}(\lambda-b)^2h}e^{\frac{1}{2}b^2t} \\
=& e^{\frac{1}{2}\lambda^2h}.
\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que mostrar la propiedad de incrementos independientes. Sean $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq T$, por un lado tenemos que $E_Q[\tilde{W}(t_i)-\tilde{W}(t_{i-1})] = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ por el resultado anterior. Por otro lado, usando la propiedad de incrementos independientes de $\{W(t)\}$ bajo P

$$\begin{aligned}
& E_Q\left[\prod_{i=1}^{n}\tilde{W}(t_i)-\tilde{W}(t_{i-1})\right] \\
=& E_P\left[e^{-bW(T)-\frac{1}{2}b^2T}\prod_{i=1}^{n}\tilde{W}(t_i)-\tilde{W}(t_{i-1})\right] \\
=& E_P\left[e^{-b(W(T)-W(t_n))-\frac{1}{2}b^2(T-t_n)}\right] \\
& \prod_{i=1}^{n}E_P\left[^{-b(W(t_i)-W(t_{i-1}))-\frac{1}{2}b^2(t_i-t_{i-1})}(W(t_i)-W(t_{i-1})+b(t_i-t_{i-1}))\right] \\
=& \, 0 = \prod_{i=1}^{n}E_Q[\tilde{W}(t_i)-\tilde{W}(t_{i-1})],
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad es consecuencia del problema 6.3.

■

Si usamos el teorema anterior para reemplazar $W(t)$ en las ecuaciones (4.5) y (4.6) tenemos que

$$S(t) = se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma\tilde{W}(t)} \tag{4.9}$$

y

$$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma d\tilde{W}(t)). \tag{4.10}$$

Así, podemos mostrar la última propiedad que nos falta para ver que Q definida en 4.3 es una medida de martingala equivalente para el modelo de Black-Scholes, y esta es que el proceso de precios de la acción descontado $\{e^{-rt}S(t)\}$ es una martingala bajo Q, con respecto a la filtración generada por $\{W(t)\}$, que es la misma generada por $\{\tilde{W}(t)\}$. Veamos, para $t < s \leq T$

$$\begin{aligned}
E_Q\left[e^{-rs}S(s)|\mathcal{F}(t)\right] &= E_Q\left[e^{-r(s-t+t)}S(t)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(s-t)+\sigma(\tilde{W}(s)-\tilde{W}(t))}|\mathcal{F}(t)\right] \\
&= e^{-rt}S(t)E_Q\left[e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(s-t)+\sigma(\tilde{W}(s)-\tilde{W}(t))}\right] \\
&= e^{-rt}S(t).
\end{aligned}$$

Habiendo establecido la medida de martingala equivalente para este modelo en tiempo continuo, podemos usarla para valorar derivados tal como se hizo en el modelo en tiempo discreto. Así, si Λ es un derivado europeo, es decir, una variable aleatoria $\mathcal{F}(T)$-medible, siguiendo la ecuación (3.5), tenemos que el precio del derivado en $0 \leq t \leq T$ está dado por

$$\Pi(t, \Lambda) = e^{-r(T-t)} E_Q[\Lambda | \mathcal{F}(t)]. \tag{4.11}$$

4.3 Fórmula de Black-Scholes

La famosa fórmula de Black-Scholes calcula el valor de una opción *call* europea en el modelo de Black-Scholes. Existe varias formas de derivar esta fórmula, la primera es usar la medida equivalente de martingala de la sección anterior, la segunda es a partir de la fórmula CRR para la misma opción dada por la ecuación (3.9) usando los paámetros descritos en la sección anterior y hacer $\tau \to 0$, y por última usar la ecuación de Black-Scholes de la siguiente sección. A continuación usaremos el primer método para derivarla.

Usando la ecuación (4.11) para $\Lambda = \max\{S(T) - K, 0\} = (S(T) - K)^+$ y $t = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\Pi(0, \Lambda) &= e^{-rT} E_Q[(S(T) - K)^+] \\
&= E_Q[(e^{-rT} S(T) - e^{-rT} K)^+] \\
&= E_Q[(e^{-rT} s e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma \tilde{W}(T)} - e^{-rT} K)^+] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (s e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma x} - e^{-rT} K)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2T} x^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (s e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma \sqrt{T} y} - e^{-rT} K)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy.
\end{aligned}$$

El integrando es positivo solo cuando $y > -\frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} =: -d_-$, luego

$$\begin{aligned}
\Pi(0, \Lambda) &= s \int_{-d_-}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T} y - \frac{1}{2} y^2} dy - e^{-rT} K \int_{-d_-}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy \\
&= s \int_{-d_-}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y - \sigma\sqrt{T})^2} dy - e^{-rT} K \int_{-d_-}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy \\
&= s \int_{-d_- - \sigma\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz - e^{-rT} K \int_{-d_-}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy \\
&= s \int_{-\infty}^{d_+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz - e^{-rT} K \int_{-\infty}^{d_-} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy \\
&= s\Phi(d_+) - e^{-rT} K \Phi(d_-),
\end{aligned}$$

donde $d_+ = d_- + \sigma\sqrt{T}$ y $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución de una variable con distribución $N(0,1)$. En general, si tomamos $0 \le t \le T$, la ecuación (4.11) resulta en

$$C(t, S(t)) := \Pi(t, \Lambda) = S(t)\Phi(d_+(t)) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_-(t)), \tag{4.12}$$

con $d_-(t) = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ y $d_+(t) = d_-(t) + \sigma\sqrt{T-t}$.

4.4 Ecuación de Black-Scholes

Consideremos ahora un derivado de tipo europeo de la forma $\Lambda = \varphi(S(T))$. Vamos a encontrar una ecuación en derivadas parciales que nos ayudará a valorar este tipo de derivados, y además vamos a deducir información sobre cómo replicar este derivado. Empecemos por definir un portafolio autofinanciado.

Definición 4.5 *Un portafolio* $\{\delta(t) = (\delta_0(t), \delta_1(t)) : 0 \le t \le T\}$ *es un proceso adaptado a la filtración generada por el movimiento browniano. El portafolio es autofinanciado si satisface que*

$$dV_\delta(t) = \delta_0(t)dB(t) + \delta_1(t)dS(t),$$

donde $V_\delta(t) = \delta_0(t)B(t) + \delta_1(t)S(t)$ *es el valor del portafolio en el tiempo* t.

La condición de autofinanciamiento anterior es análoga a la condición de autofinanciamiento en el modelo discreto, como lo muestra el problema 3.3. Un portafolio replicante del derivado debe entonces satisfacer que $V_\delta(T) = \varphi(S(T))$. Para $0 \le t \le T$ queremos encontrar una función $u(t,s)$ tal que $V_\delta(t) = u(t, S(t))$ y que por lo tanto describa el precio del derivado en tiempo t. Para poder encontrar una expresión para tal función u necesitamos una herramienta muy importante en análisis estocástico llamada fórmula de Itô; el análoga de la regla de la cadena para análisis real.

La siguiente es una deducción heurística de la fórmula de Itô: Consideremos una proceso que satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = \alpha(X(t))dt + \beta(X(t))dW(t),$$

con α y $\beta > 0$ funciones suaves. Volviendo a la derivación del proceso de precio de la acción, esta ecuación tiene su análoga discreta como (ver ecuación (4.4))

$$\Delta X(t) = \alpha(X(t))\Delta t + \beta(X(t))\Delta W(t).$$

Ahora, si definimos el proceso $Y(t) = f(t, X(t))$ para una función f suave, una aproximación de Taylor hasta términos del orden de Δt produce

$$Y(t+\Delta t) - Y(t) \approx \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t))\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))\Delta X(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t))(\Delta X(t))^2,$$

pero $(\Delta X(t))^2 \approx \beta(X(t))^2\Delta t$ pues los otros términos son menores que Δt. Así, llegamos a la fórmula de Itô

$$\begin{aligned} dY(t) &= df(t, X(t)) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t)) + \alpha(X(t))\frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t)) + \frac{1}{2}\beta(X(t))^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t))\right) dt \\ &+ \beta(X(t))\frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))dW(t). \end{aligned} \tag{4.13}$$

EJEMPLO 4.1

Vamos a usar la expresión (4.5) para el proceso de precios de la acción y la fórmula de Itô para deducir la ecuación diferencial (4.6). Consideremos la función $f(t,x) = se^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma x}$ y el proceso $dX(t) = dW(t)$, es decir, $X(t) = W(t)$ es el movimiento browniano. Note que en este caso $\alpha \equiv 0$ y $\beta \equiv 1$. Es claro que $S(t) = f(t, W(t))$ y aplicando la fórmula (4.13) tenemos

$$\begin{aligned}
dS(t) &= df(t, W(t)) \\
&= \left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2))S(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)\right) dt + \sigma S(t) dW(t) \\
&= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t).
\end{aligned}$$

Volvamos ahora al problema de hallar una expresión para el valor del derivado europeo. Si tal función u existe y δ es un portafolio replicante autofinanciado entonces se debe satisfacer que $du(t, S(t)) = dV_\delta(t)$. De la condición de auofinanciamiento tenemos que

$$\begin{aligned}
dV_\delta(t) &= \delta_0(t)dB(t) + \delta_1(t)dS(t) \\
&= \delta_0(t)rB(t)dt + \delta_1(t)S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)) \\
&= (r\delta_0(t)B(t) + \mu\delta_1(t)S(t))\, dt + \sigma\delta_1(t)S(t)dW(t) \\
&= (rV_\delta(t) - r\delta_1(t)S(t) + \mu\delta_1(t)S(t))\, dt + \sigma\delta_1(t)S(t)dW(t). \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Por otro lado, la fórmula de Itô aplicada a la función u nos dice que

$$\begin{aligned}
du(t, S(t)) = &\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, S(t)) + \mu S(t)\frac{\partial u}{\partial s}(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(t, S(t))\right) dt \\
&+ \sigma S(t)\frac{\partial u}{\partial s}(t, S(t))dW(t)
\end{aligned}$$

Igualando el término con $dW(t)$ en (4.14) tenemos que $\sigma\delta_1(t)S(t) = \sigma S(t)\frac{\partial u}{\partial s}(t, S(t))$, lo que nos dice que el portafolio replicante cumple

$$\delta_1(t) = \frac{\partial u}{\partial s}(t, S(t)). \qquad (4.15)$$

Si ahora igualamos la parte con dt en (4.14), usando la condición para δ_1 y el hecho de que $u(t, S(t)) = V_\delta(t)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
rV_\delta(t) - r\delta_1(t)S(t) &+ \mu\delta_1(t)S(t) \\
&= ru(t, S(t)) - rS(t)\frac{\partial u}{\partial s}(t, S(t)) + \mu S(t)\frac{\partial u}{\partial s}(t, S(t)) \\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(t, S(t)) + \mu S(t)\frac{\partial u}{\partial s}(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(t, S(t)),
\end{aligned}$$

lo que resulta en la ecuación de Black-Scholes para la función $u(t, s)$ dada por

$$ru(t, s) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, s) + rs\frac{\partial u}{\partial s}(t, s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(t, s) \qquad (4.16)$$

y la condición de valor terminal $u(T, s) = \varphi(s)$.

De la derivación anterior encotramos que $\delta_1(t)$ debe satisfacer (4.15). A esta cantidad se le conoce como el Δ del derivado cuyo precio está dado la función u. Otras medidas de sensiblidad usadas en la práctica son las llamadas griegas, defininidas como

$$\Gamma = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2},$$
$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

EJEMPLO 4.2

Consideremos una opción *call*. De la fórmula de Black-Scholes tenemos que $u(t,s) = C(t,s)$ dada por (4.12), es decir,

$$C(t,s) = s\Phi(d_+(t)) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_-(t)),$$

con $d_-(t) = \frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ y $d_+(t) = d_-(t) + \sigma\sqrt{T-t}$ debe satisfacer la ecuación (4.16). Note además que

$$\lim_{t\to T} d_\pm(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } s > K \\ 0 & \text{si } s = K \\ -\infty & \text{si } s < K \end{cases},$$

luego $\lim_{t\to T} C(s,t) = \max\{s-K,0\}$, lo que coincide con la condición terminal de la ecuación de Black-Scholes. Puesto que $u(t,S(t)) = V_\delta(t) = \delta_0(t)B(t) + \delta_1(t)S(t)$, para δ portafolio replicante, es claro que

$$\delta_0(t) = -e^{-rT}K\Phi(d_-(t)),$$

luego para replicar la opción siempre se debe estar en corto en los bonos, y además

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial s}(t,S(t)) = \delta_1(t) = \Phi(d_+(t)).$$

Las demás griegas resultan ser

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial s^2} = \frac{\Phi'(d_+(t))}{\sigma s\sqrt{T-t}},$$
$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\sigma s\Phi'(d_+(t))}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}\Phi(d_-(t)).$$

PROBLEMAS

4.1 Muestre la proposición 4.1

4.2 Si X se distribuye $N(\mu,\sigma^2)$, muestre que $E[e^X] = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$. (Comparar con el problema A.3).

4.3 Muestre que el proceso $M(t) = W(t)^2 - t$ es una martingala. (Ayuda: Escriba $W(s) = W(s) - W(t) + W(t)$ para $s > t$ y use la propiedad de incrementos independientes.)

4.4 Si X se distribuye $N(0,t)$ y $a \in \mathbb{R}$, muestre que $E[e^{-aX-\frac{1}{2}a^2t}(X+at)] = 0$

4.5 Considere el modelo de Black-Scholes con parámetros $s = 100$, $r = 0,02$, $\mu = 0,045$ y $\sigma = 0,3$, y una opción *call* europea con precio de ejercicio $K = 100$ y tiempo de maduración $T = 1$.

a) Use la fórmula CRR (3.9) para calcular el valor de la opción, con u y d apropiados, para valores de $N = 100, 200, \ldots, 1000$ y grafique sus resultados

b) Use la fórmula de Black-Scholes (4.12) para calcular el valor de la opción y compare con los resultados anteriores.

4.6 Calcule el valor, en el tiempo $0 \leq t \leq T$, de una opción *call* binaria (ver problema 3.9) con precio de ejercicio K y tiempo de maduración T. ¿Qué pasa cuando $t \to T$?

4.7 Defina $f(t,x) = e^{-rt}x$ y use la fórmula de Itô para calcular $df(t, S(t))$ con $S(t)$ descrito por la ecuación diferencial (4.10).

4.8 [5] Considere el modelo de Black-Scholes con $r = 0,2$. El precio de cierto derivado europeo con tiempo de maduración T está dado por $f(t,s) = s^2 e^{2(T-t)}$.

a) Usando la ecuación de Black-Scholes, encuentre la volatilidad σ del precio de la acción.

b) ¿Cuál es la función de pago φ del derivado?

c) Encuentre los procesos $\delta_0(t)$ y $\delta_1(t)$ que replican el derivado.

4.9 Considere dos procesos, llamados de Itô, definidos como

$$\begin{aligned} dX(t) &= \alpha_X(t)dt + \beta_X(t)dW(t) \\ dY(t) &= \alpha_Y(t)dt + \beta_Y(t)dW(t), \end{aligned}$$

donde $\alpha_X, \alpha_Y, \beta_X, \beta_Y$ son procesos adaptados a la filtración generada por el movimiento browniano $W(t)$. Sea una función suave $g(x,y)$ con valores en los reales.

a) Use un argumento heurístico para mostrar que

$$\begin{aligned} dg(X(t),Y(t)) = {} & \frac{\partial g}{\partial x}(X(t),Y(t))dX(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(X(t),Y(t))dY(t) \\ & + \frac{1}{2}\left(\beta_X(t)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(X(t),Y(t)) + \beta_Y(t)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(X(t),Y(t))\right) dt \\ & + \beta_X(t)\beta_Y(t)\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(X(t),Y(t))dt. \end{aligned}$$

b) Use lo anterior para mostrar la regla del producto de Itô

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + \beta_X(t)\beta_Y(t)dt$$

4.10 [10] Sea $\zeta(t) = e^{-bW(t)-\left(r+\frac{1}{2}b^2\right)t}$, con b el precio de mercado del riesgo, y sea δ un portafolio autofinanciado.

a) Reescriba (4.14) en términos de $\tilde{W}(t)$ y use la regla del producto del problema 4.9 para mostrar que $d(e^{-rt}V_\delta(t))$ no tiene término con dt, y por tanto $e^{-rt}V_\delta(t)$ es una martingala bajo Q.

b) Muestre que $d\zeta(t) = -\zeta(t)(rdt + bdW(t))$.

c) Use de nuevo (4.14) y la regla del producto del problema 4.9 para mostrar que $d(\zeta(t)V_\delta(t))$ no tiene término con dt, y por tanto $\zeta(t)V_\delta(t)$ es una martingala bajo P.

d) Si $\Lambda = \varphi(S(T))$ y δ es un portafolio replicante de Λ, muestre que

$$\Pi(t,\Lambda) = V_\delta(t) = \frac{1}{\zeta(t)} E_P[\zeta(T)\Lambda|\mathcal{F}(t)].$$

e) Use d) para deducir la fórmula de Black-Scholes.

4.11 Considere el de Black-Scholes donde $S(t)$ describe una tasa de cambio. Suponga que la tasa de retorno extranjera es r_f y por lo tanto la nueva condición de autofinanciamiento es

$$dV_\delta(t) = \delta_0(t)dB(t) + \delta_1(t)dS(t) + r_f\delta_1(t)S(t)dt.$$

Encuentre la ecuación de Black-Scholes en este caso.

4.12 Verifique todos los cálculos enunciados en el ejemplo 4.2. Para algunos de ellos puede usar que

$$ru(t,s) = \Theta + rs\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \Gamma.$$

4.13 Considere C dada por la fórmula de Black-Scholes (4.12) como función de t y K, para s fijo. Muestre que satisface la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK\frac{\partial C}{\partial K} = 0.$$

CAPÍTULO 5

MODELO BINOMIAL DE TASA INTERÉS

En los modelos de mercado vistos en los capítulos anteriores siempre asumimos que la tasa de retorno del activo libre de riesgo, que llamamos bono, era constante a lo largo del tiempo. En este capítulo vamos a quitar ese supuesto para tener modelos más cercanos a la realidad. El instrumento central en este capítulo será el bono, el cual va a tener un significado diferente, aunque relacionado, con el bono de los capítulos anteriores.

Como se mencionó en la Introducción, un bono, o activo de renta fija, es un instumento financiero que le promete al poseedor una secuencia de pagos futuros fijos. Dentro de los pagos futuros se distinguen dos clases: un pago que se hace en el momento en que el bono vence, llamando valor nominal, y el resto de pagos denominados cupones. Un bono unitario cero cupón tiene un solo pago, el valor nominal, de 1. Estos bonos son las piezas clave para construir cualquier otro bono como veremos más adelante. En lo que sigue, siempre que se mencione bono haremos referencia a un bono unitario cero cupón.

5.1 Tipos de interés

Consideremos el conjunto de tiempos $t = 0, \dots, T$ sobre los cuales vamos a definir el valor de los bonos. Para $0 \leq s \leq t \leq T$, denotamos por $B(s,t)$ al precio en el tiempo s del bono que vence en el tiempo t. Claramente se debe tener que $B(t,t) = 1$ para todo t y además $B(s,t) \leq 1$, luego

$$B(s,t) = e^{-y(s,t)(t-s)}, \tag{5.1}$$

para una familia de rendimientos $y(s,t) \geq 0$. Esta función, que puede ser aleatoria, que depende de dos parámetros se denomina estructura temporal de tasas de interés. Los rendimientos $y(0,t)$ determinados por los precios actuales de los bonos se denominan tasas *spot*.

Ahora, si tenemos un bono que paga cupones $C_1, \ldots, C_n$ en los tiempos $0 < t_1 < \ldots < t_n$ y que vence en t_n con valor nominal F, entonces el precio de este bono está dado por

$$P = C_1 e^{-t_1 y(0,t_1)} + \cdots + (C_n + F)e^{-t_n y(0,t_n)}.$$

Ahora, si y es tal que

$$P = C_1 e^{-t_1 y} + \cdots + (C_n + F)e^{-t_n y},$$

se le denomina el rendimiento a maduración del bono con cupones. Muchas veces los bonos cero cupón no se negocian para vencimiento a largo plazo, solo bonos con cupones, luego es necesario extraer la información de las tasas *spot* a partir de estos precios, como lo muestra el problema 5.1.

La estructura temporal debe satisfacer ciertas relaciones para no permitir oportunidades de arbitraje en el mercado, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 5.1 *Si la estructura temporal es determinística entonces para todo* $0 \leq s \leq t \leq T$ *se tiene que*

$$B(0,t) = B(0,s)B(s,t). \tag{5.2}$$

Demostración: Usaremos un argumento de no arbitraje para probar el resultado. Supongamos primero que $B(0,t) < B(0,s)B(s,t)$, en este caso se puede comprar un bono que madura en t y, como el precio de los bonos es conocido en 0, vender en corto $B(s,t)$ bonos que maduran en s. Esta transacción tiene una ganancia inicial positiva. En el tiempo s se vende un corto un bono que madura en t, con lo cual se salda la deuda de los bonos iniciales que maduraban en s. En el tiempo t se salda la deuda con el bono inicial con vencimiento t. Finalmente se obtiene un beneficio positivo, situación clara de arbitraje. Ahora, si $B(0,t) > B(0,s)B(s,t)$ la estrategia contraria a la anterior también produce arbitraje. ■

A partir del resultado anterior tenemos que $B(s,t) = \frac{B(0,t)}{B(0,s)} = e^{sy(0,s)-ty(0,t)}$, luego el precio de todos los bonos dependen solo de las tasas *spot*, situación que no refleja la realidad de los mercados y por tanto se hace necesario usar modelos estocásticos para describir la estructura temporal. En este caso la ecuación (5.2) no tiene porqué satisfacerse, pero si se puede encontrar un tasa $f(0,s,t)$ tal que

$$B(0,t) = B(0,s)e^{-(t-s)f(0,s,t)}.$$

En general, para $0 \leq s < t_1 < t_2 \leq T$ podemos definir $f(s,t_1,t_2)$ como la tasa tal que

$$B(s,t_2) = B(s,t_1)e^{-(t_2-t_1)f(s,t_1,t_2)}. \tag{5.3}$$

La interpretación de esta tasa es clara: Suponga que en el tiempo s decide que en el tiempo t_1 necesita pedir un préstamo de 1 que va a saldar en el tiempo t_2. Si no quiere exponerse a los cambios de tasa puede comprar un bono que vence en t_1 por un precio de $B(s,t_1)$, para esto vende $\frac{B(s,t_1)}{B(s,t_2)}$ bonos que vencen en t_2. Así, en t_1 recibe 1 y en t_2 debe pagar $\frac{B(s,t_1)}{B(s,t_2)}$, luego la tasa real a la que se pidió prestado, usando (5.3), fue

$$f(s,t_1,t_2) = -\frac{\ln B(s,t_2) - \ln B(s,t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Si $t_1 = t$ y $t_2 = t_1 + 1$, entonces $f(s.t) := f(s,t,t+1)$ se denomina tasa a plazo o taza *forward*. En este caso,

$$f(s,t) = \ln B(s,t) - \ln B(s,t+1). \tag{5.4}$$

A partir de las tasas a plazo podemos encontrar el precio de los bonos pues

$$\begin{aligned} B(s,t) &= \frac{B(s,s+1)}{B(s,s)} \frac{B(s,s+2)}{B(s,s+1)} \cdots \frac{B(s,t)}{B(s,t-1)} \\ &= e^{-f(s,s)-f(s,s+1)-\ldots-f(s,t-1)}, \end{aligned}$$

y la estructura temporal

$$y(s,t) = \frac{f(s,s) + f(s,s+1) + \ldots + f(s,t-1)}{t-s}.$$

En particular $y(s,s+1) = f(s,s) =: r(s)$ se llama la tasa de corto plazo. Es importante no confundir $r(s)$ con $f(0,s)$ pues ambas aplican para el período entre s y $s+1$ pero la primera no es conocida en el tiempo 0, mientras que la segunda sí lo es.

Finalmente, definimos el factor de descuento

$$D(t) := e^{-r(0)-\ldots-r(t-1)} \tag{5.5}$$

para $t = 1, \ldots, T$ y $D(0) = 1$, y la cuenta de dinero $A(t) = \frac{1}{D(t)}$, que corresponde al valor en el tiempo t por haber depositado en el banco 1 unidad en el tiempo 0. El bono definido en los capítulos anteriores es un caso particular de la cuenta de dinero cuando la tasa de interés es constante. Note que $B(0,1) = e^{-f(0,0)} = e^{-r(0)} = D(1) = \frac{1}{A(1)}$, y corresponde al factor de descuento del primer período.

5.2 Descripción

Los modelos de tasa de interés son en general más complejos que los de acciones, como los vistos en los capítulos anteriores. En primera instancia, hay básicamente dos formas para descibir las tasas de interés, a partir de la estructura temporal o usando tasas de corto plazo. Conocer las primeras implica conocer las segundas, como vimos en la sección anterior, pero no al contrario, pero las tasas de corto plazo son más fáciles de describir. Segundo, al describir un modelo de tasa de interés, se están describiendo simultaneamente múltiples instrumentos financieros con tiempos de maduración distintos y que además tienen un pago de 1 fijo. Esta es una clara diferencia con los modelos de activos riesgosos como las acciones. Finalmente, los datos iniciales son todas las tasa *spot* de los bonos en tiempo 0, en contraste con las acciones que es un solo dato.

Todos estos aspectos se deben tener en cuenta en el momento de definir un modelo que no tenga oportunidades de arbitraje, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5.1

Considere los precios de los bonos de la figura 5.1 con $A(1) = 1,01$. Vamos a ver que estos precios permiten una oportunidad de arbitraje. Consideremos un portafolio con x bonos que vencen en el tiempo 3 y y en la cuenta de dinero, que repliquen el valor

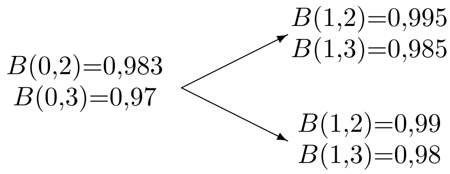

Figura 5.1: Precios de los bonos del ejemplo 5.1

en el tiempo 1 de un bono que vence en el tiempo 2. Este portafolio debe satisfacer las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
1,01y + 0,985x &= 0,995 \\
1,01y + 0,98x &= 0,99.
\end{aligned}
$$

La solución de este sistema es $x = 1$ y $y = 0,0099$, cuyo valor en tiempo 0 es $0,97x + y = 0,9799$ que es menor a $B(0,2)$, luego el bono que vence en 2 está sobrevalorado en el tiempo 0 y esto es una oportunidad de arbitraje.

Para evitar oportunidades de aribitraje como las del ejemplo anterior, vamos definir un modelo de las tasas cortas con las cuales podemos definir el factor de descuento y a partir de éste definiremos los bonos. Puesto que el pago final de un bono es 1, el valor del bono antes de su vencimiento debe coincidir con el valor esperado condicional, bajo una medida de martingala equivalente, de 1 descontado usando el factor de descuento (compare con la ecuación (3.4)). Esto justifica la definición de los precios de los bonos que daremos más adelante.

Consideremos el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}(t)\}, Q)$, con $\Omega = \{C, S\}^T$, la fitración definida como en el capítulo 3 y Q medida de probabilidad con probabilidad positiva para cada elemento de Ω. En este espacio definimos el proceso estocástico adaptado de tasas cortas $\{r(t) : t = 0, \ldots, T-1\}$ y el proceso de factores de descuento $\{D(t) : t = 0, \ldots, T\}$ dado por (5.5).

Definición 5.2 *Dados $0 \leq s \leq t \leq T$ el precio en el tiempo s del bono que vence en el tiempo t se define como*

$$
B(s,t) = E_Q \left[\frac{D(t)}{D(s)} \middle| \mathcal{F}(s) \right]. \tag{5.6}
$$

Puesto que $D(s) \in \mathcal{F}(s-1) \subset \mathcal{F}(s)$, usando la propiedad de sacar lo conocido del valor esperado condicional, la ecuacion(5.6) se puede reescribir como

$$
D(s)B(s,t) = E_Q[D(t)|\mathcal{F}(s)]. \tag{5.7}
$$

Una consecuencia inmediata de la definición anterior es que el proceso de precios descontado de los bonos $\{D(s)B(s,t) : 0 \leq s \leq t\}$ es una martingala bajo Q. En efecto, $E_Q[D(s)B(s,t)] \leq 1$, el proceso es adaptado por la definición de valor esperado condicional y la ecuación (5.6) y además si $s < t$, usando (5.7) y la propiedad de torre, tenemos que

$$
\begin{aligned}
E_Q[D(s+1)B(s+1,t)|\mathcal{F}(s)] &= E_Q\left[E_Q[D(t)|\mathcal{F}(s+1)]|\mathcal{F}(s)\right] \\
&= E_Q[D(t)|\mathcal{F}(s)] \\
&= D(s)B(s,t).
\end{aligned}
$$

Definición 5.3 *Un portafolio δ de bonos es una familia de procesos $\{\delta(s,t) : 1 \leq t \leq T, 1 \leq s \leq t\}$, donde $\delta(s,t)$ es la cantidad de bonos que vencen en t en el portafolio durante el intervalo $(s-1, s]$, tal que $\delta(s,t) \in \mathcal{F}(s-1)$. El portafolio es autofinanciado si satisface que*

$$V_\delta(s) := \sum_{t=s}^{T} \delta(s,t)B(s,t) = \sum_{t=s+1}^{T} \delta(s+1,t)B(s,t).$$

Teorema 5.4 *El proceso de valor de un portafolio autofinanciado descontado $\{D(s)V_\delta(s)\}$ es una martingala bajo Q.*

Demostración: De la definición de $V_\delta(s)$ es claro que el proceso es adaptado y las variables aletorias son integrables. Para ver la propiedad de martingala, recordemos que $D(s+1)$ y $\delta(s+1,t)$ son variables $\mathcal{F}(s)$-medibles, así que usando (5.7)

$$\begin{aligned} E_Q[D(s+1)V_\delta(s+1)|\mathcal{F}(s)] &= D(s+1)\delta(s+1,s+1) \\ &+ \sum_{t=s+2}^{T} \delta(s+1,t)E_Q[D(s+1)B(s+1,t)|\mathcal{F}(s)] \\ &= D(s)B(s,s+1)\delta(s+1,s+1) \\ &+ \sum_{t=s+2}^{T} \delta(s+1,t)D(s)B(s,t) \\ &= D(s)V_\delta(s), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene por ser δ autofinanciado. ■

De la misma forma como definimos una oportunidad de arbitraje en los capítulos anteriores, decimos que un portafolio δ autofinanciado es una oportunidad de arbitraje si $V_\delta(0) = 0$ y para algún s se tiene que $Q(V_\delta(s) \geq 0) = 1$ y $Q(V_\delta(s) > 0) > 0$. Si δ produjera una oportunidad de arbitraje por el teorema anterior tendríamos que

$$0 = V_\delta(0) = E_Q[D(s)V_\delta(s)] > 0,$$

lo que es una contradicción. Esto muestra que este modelo no permite tales oportunidades.

EJEMPLO 5.2 Modelo de Ho-Lee

En el siguiente modelo, conocido como el modelo de Ho-Lee, las tasas cortas se definen como $r(t)(\omega) = a_t + b_t C_{\omega(t)}$, donde a_t, b_t son constantes del modelo y $C_{\omega(t)}$ es el número de C hasta las primeras t componentes de $\omega \in \Omega$. Además, se define la medida de riesgo neutral como $Q(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ (ver problema A.2). Consideremos un modelo con $T = 3$, $a_0 = 0,05$, $a_1 = 0,045$, $a_2 = 0,04$ y $b_1 = b_2 = 0,01$. La figura 5.2 muestra el valor de las tasas cortas, los factores de descuento y el precio de los bonos. Note que aunque las tasas cortas no dependen de la secuencia exacta de C y S, solo del número de C, para las tasas de descuento si es importante el orden de la secuencia.

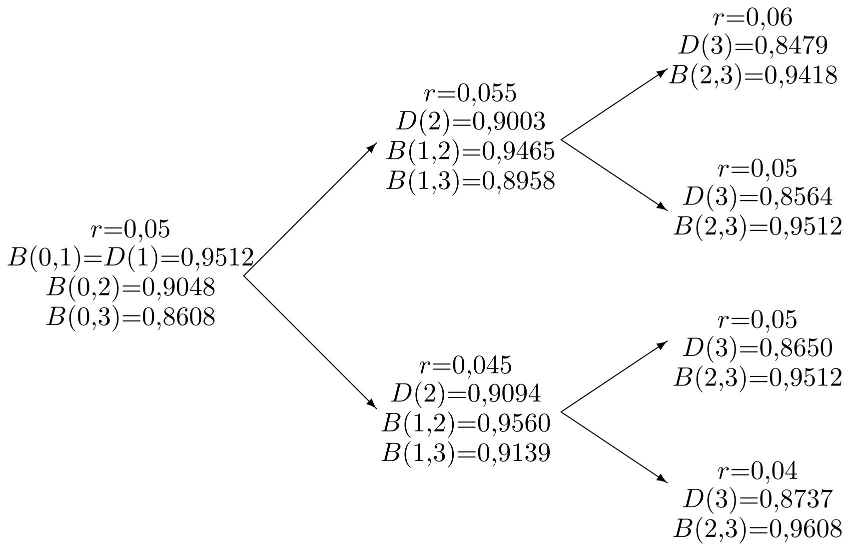

Figura 5.2: Modelo de Ho-Lee del ejemplo 5.2

5.3 Valoración de derivados

Ya hemos visto anteriormente un derivado de las tasas de interés y son los bonos con cupones $C_1, C_2, \ldots, C_t$ y valor nominal F, donde t es el tiempo de vencimiento. En este caso, el valor en tiempo 0 de un bono con estos pagos está dado por

$$P = \sum_{k=1}^{t} C_k B(0,k) + FB(0,t) = E_Q\left[\sum_{k=1}^{t} D(k)C_k + FD(t)\right], \tag{5.8}$$

y en el tiempo $s < t$, justo después de hacer el pago del cupón C_s, el bono tiene un valor de

$$\sum_{k=s+1}^{t} C_k B(s,k) + FB(s,t) = E_Q\left[\sum_{k=s+1}^{t} \frac{D(k)C_k}{D(s)} + \frac{FD(t)}{D(s)}\middle| \mathcal{F}(s)\right].$$

En muchos casos los cupones se especifican como un retorno, en lugar de valores fijos, y estos retornos son relativos a el valor nominal F. Así, se tiene que $C_k = FR_k$ para algún retorno R_k. Cuando estos retornos son variables aleatorias que dependen de la tasa de interés, el bono se dice que tiene cupones flotantes. Uno de los retornos más usados son los deniminados LIBOR (que viene de *London Interbank Offered Rate*) que es el análogo a las tasas a plazo pero cuando se considera un interés simple en lugar de compuesto continuamente. Es decir, suponga que en el tiempo s compra un bono que vence en el tiempo t por un precio de $B(s,t)$ y para esto vende $\frac{B(s,t)}{B(s,t+1)}$ bonos que vencen en $t+1$. De esta forma en t recibe 1 y en $t+1$ paga $\frac{B(s,t)}{B(s,t+1)}$, luego la tasa de interés simple de este préstamo es

$$1 + L(s,t) = \frac{B(s,t)}{B(s,t+1)},$$

es decir,

$$L(s,t) := \frac{B(s,t) - B(s,t+1)}{B(s,t+1)}. \tag{5.9}$$

Proposición 5.5 *Sea* $0 \le s \le t \le T-1$. *El precio justo en tiempo* s *de un derivado que paga* $L(t,t)$ *en el tiempo* $t+1$ *es* $B(s,t) - B(s,t+1) = L(s,t)B(s,t+1)$.

Demostración: De la definición (5.9) y la ecuación (5.7) se tiene que

$$L(t,t) = \frac{1}{B(t,t+1)} - 1 = \frac{D(t)}{D(t+1)} - 1,$$

luego el precio del derivado es

$$E_Q\left[\left.\frac{L(t,t)D(t+1)}{D(s)}\right|\mathcal{F}(s)\right] = E_Q\left[\left.\frac{D(t)}{D(s)} - \frac{D(t+1)}{D(s)}\right|\mathcal{F}(s)\right] = B(s,t) - B(s,t+1).$$

∎

La proposición anterior es muy útil para valorar el siguiente importante derivado. Sea $1 \le t \le T$. Un *swap* con vencimiento t es un contrato que le permite al comprador intercambiar un bono con cupones flotantes $L(t-1,t-1)$ por uno con cupones fijos K, ambos con vencimiento t. Es decir, el comprador de este derivado recibe los pagos $P_s = K - L(s-1,s-1)$ en cada $s = 1,\dots,t$. Se llama *swap rate* al valor de K que hace el valor de este contrato igual a 0 en el tiempo 0.

Proposición 5.6 *El precio en tiempo de un* swap *con vecimiento* t *y cupones fijos* K *está dado por*

$$Swp_t = K\sum_{s=1}^{t} B(0,s) - (1 - B(0,t)) = \sum_{s=1}^{t} B(0,s)(K - L(0,s-1)). \tag{5.10}$$

Así, el swap rate *resulta*

$$SR_t = \frac{1 - B(0,t)}{\sum\limits_{s=1}^{t} B(0,s)}. \tag{5.11}$$

Demostración: Sabemos que un pago de K en el tiempo s tiene un precio de $KB(0,s)$ en el tiempo 0, y por la proposición anterior tenemos que un pago de $L(s-1,s-1)$ en el tiempo s tiene un precio de $B(0,s-1) - B(0,s)$ en el tiempo 0. Así, el precio P_s en el tiempo 0 es $KB(0,s) - (B(0,s-1) - B(0,s))$ y sumando sobre $s = 1,\dots,t$ tenemos la primera igualdad en (5.10). La segunda igualdad se obtiene de la misma forma usando que $B(0,s-1) - B(0,s) = L(0,s-1)B(0,s)$ por (5.9). ∎

Otros derivados usuales de tasas de interés son los siguientes: Un *cap* es un contrato que paga $(L(s-1,s-1) - K)^+$ en el tiempo s para $s = 1,\dots,t$, y un *floor* es un contrato que paga $(K - L(s-1,s-1))^+$. Si denotamos con Cap_t y Flr_t los precios en tiempo 0 de estos derivados que vencen en t, tenemos que

$$Swp_t + Cap_t = Flr_t.$$

Consideremos ahora algunos derivados sobre un activo con precios $\{S(t) : t = 0,\dots,T\}$, donde este activo puede ser una acción o un derivado mismo sobre tasas de interés como los anteriores. El proceso de precios de este activo tiene que ser un proceso adaptado a la descrita en el capiítulo 3 y además vamos a asumir que es consistente con el modelo de tasas de interés, es decir, el proceso de precios descontado debe ser una martingala respecto a la medida Q:

$$E_Q[D(t+1)S(t+1)|\mathcal{F}(t)] = D(t)S(t), \tag{5.12}$$

para $t = 0, \ldots, T-1$.

Recordemos del capítulo 1 que un contrato *forward* obliga a una de las partes a comprarle el activo a la otra parte por un precio de entrega sin que haya ningún intercambio de dinero en el momento de iniciar el contrato. Si el contrato se inicia en s y vence en t, para $0 \leq s \leq t \leq T$, denotamos por $F(s,t)$ el precio de entrega que no permite arbitraje. Note que este contrato tiene un pago de $S(t) - F(s,t)$ en el tiempo t, luego por la propiedad de martingala (5.12) tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= E_Q\left[\frac{D(t)}{D(s)}(S(t) - F(s,t))|\mathcal{F}(s)\right] \\ &= S(s) - F(s,t)E_Q\left[\left.\frac{D(t)}{D(s)}\right|\mathcal{F}(s)\right] \\ &= S(s) - F(s,t)B(s,t), \end{aligned}$$

y por tanto

$$F(s,t) = \frac{S(s)}{B(s,t)}. \tag{5.13}$$

Con un argumento similar al del ejemplo 1.1 habríamos obtenido el mismo resultado. Los contratos *forward* en la práctico tiene varios problemas, siendo el primero de ellos que en mercados muy líquidos se necesitarían muchos de estos contratos con diferentes fechas de inicio, lo que es ineficiente, y el segundo, y más importante, es el riesgo de que la otra parte del contrato lo incumpla. Por estas razones se crearon los futuros.

Definición 5.7 *Dado $0 \leq t \leq T$, el proceso de precios de los futuros con vencimiento t, $\{Fut(s,t) : s = 0, \ldots, t\}$, es un proceso adaptado que satisface las siguientes condiciones:*

1. $Fut(t,t)) = S(t)$
2. *Para cada $0 \leq s < t$ se tiene que*

$$\frac{1}{D(s)}E_Q\left[\sum_{k=s}^{t-1} D(k+1)(Fut(k+1,t) - Fut(k,t))|\mathcal{F}(s)\right] = 0. \tag{5.14}$$

En el caso del futuro, el inversionista que entra en el contrato en el tiempo s recibe los pagos $Fut(k+1,t) - Fut(k,t)$ en el tiempo $k+1$ para $k = s, \ldots, t-1$ y loego recibe el activo en el tiempo t. La condición (5.14) dice que el valor de este contrato, para todos los tiempos s, es 0, tal como en el caso del *forward*. Esto implica tambin que el inversionista puede salirse del contrato en cualquier momento sin ningún costo.

Teorema 5.8 *Dado $0 \leq t \leq T$, entonce $E_Q[S(t)|\mathcal{F}(s)]$, para $s = 0, \ldots, t$ satisface las condiciones del proceso de precios de los futuros y es el único proceso que las satisface (c.s. con respecto a Q).*

Demostración: Veamos primero que este proceso satisface las condiciones de la definición 5.7. De la definición de valor esperado condicional tenemos que el proceso es adaptado. Ahora, es claro que $E_Q[S(t)|\mathcal{F}(t)] = S(t)$. Para la condición (5.14) veamos que cada término de la sumatoria es 0. Por la propiedad de torre del valor esperado condicional tenemos que para $k = s, \ldots, t-1$

$$\begin{aligned}
&E_Q\left[D(k+1)(E_Q[S(t)|\mathcal{F}(k+1)] - E_Q[S(t)|\mathcal{F}(k)])|\mathcal{F}(s)\right] \\
&\quad = E_Q\left[E_Q\left[D(k+1)(E_Q[S(t)|\mathcal{F}(k+1)] - E_Q[S(t)|\mathcal{F}(k)])|\mathcal{F}(k)\right]|\mathcal{F}(s)\right] \\
&\quad = E_Q\left[D(k+1)\left(E_Q[E_Q[S(t)|\mathcal{F}(k+1)]|\mathcal{F}(k)] - E_Q[S(t)|\mathcal{F}(k)]\right)\right)|\mathcal{F}(s)\right] \\
&\quad = E_Q\left[D(k+1)\left(E_Q[S(t)|\mathcal{F}(k)] - E_Q[S(t)|\mathcal{F}(k)]\right)|\mathcal{F}(s)\right] \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Veamos ahora la unicidad. De la condición (5.14) tenemos que para $s = 0, \ldots, t-2$

$$\begin{aligned}
0 = &\sum_{k=s}^{t-1} E_Q\left[D(k+1)(Fut(k+1,t) - Fut(k,t))|\mathcal{F}(s)\right] \\
&- \sum_{k=s+1}^{t-1} E_Q\left[D(k+1)(Fut(k+1,t) - Fut(k,t))|\mathcal{F}(s+1)\right],
\end{aligned}$$

y tomando valor esperado condicionado a $\mathcal{F}(s)$ en se obtiene

$$E_Q[D(s+1)(Fut(s+1,t) - Fut(s,t))|\mathcal{F}(s)] = 0.$$

Para $s = t-1$, de (5.14) se tiene que la condición anterior también es válida. Luego para $s = 0, \ldots, t-1$ se tiene que

$$D(s+1)\left(E_Q[Fut(s+1,t)|\mathcal{F}(s)] - Fut(s,t)\right) = 0,$$

es decir, $Fut(s,t)$ es una martingala bajo Q. Así que por el ejercicio A.6 se tiene que

$$0 = E_Q[S(t) - Fut(t,t)|\mathcal{F}(s)] = E_Q[S(t)|\mathcal{F}(s)] - Fut(s,t).$$

■

Si $D(t)$ y $S(t)$ no están correlacionados condicionados a $\mathcal{F}(s)$, es decir, si $E_Q[D(t)S(t)|\mathcal{F}(s)] = E_Q[D(t)|\mathcal{F}(s)]E_Q[S(t)|\mathcal{F}(s)]$, entonces

$$\begin{aligned}
Fut(s,t) &= E_Q[S(t)|\mathcal{F}(s)] \\
&= \frac{E_Q[D(t)S(t)|\mathcal{F}(s)]}{E_Q[D(t)|\mathcal{F}(s)]} \\
&= \frac{D(s)S(s)}{E_Q[D(t)|\mathcal{F}(s)]} \\
&= \frac{S(s)}{B(s,t)} = F(s,t).
\end{aligned}$$

PROBLEMAS

5.1 Suponga que $B(0,1) = 0,91$ y un bono que paga cupones de 0,1 en $t = 1,2$ y que vence en $t = 2$ tiene un precio de 1,03. Encuentre $y(0,1)$ y $y(0,2)$.

5.2 Suponga que la estructura temporal es determinística y no depende del tiempo de maduración. Use la proposición 5.1 para mostrar que todos los rendimientos $y(t)$ son iguales.

5.3 Reproduzca el cálculo de los factores de descuento y el precio de los bonos del ejemplo 5.2. Adicionalmente, encuentre la estructura temporal y las tasas de largo plazo para este ejemplo.

5.4 Considere un modelo de tasas de corto plazo de 2 periodos con $r(0) = -\ln(6/7)$, $r(1)(C) = -\ln(5/6)$ y $r(1)(S) = -\ln(2/3)$ con $Q(C) = 2/3$ y $Q(S) = 1/3$.

a) Encuentre las precios de los bonos $B(0,1)$, $B(0,2)$ y $B(1,2)$ y la correspondiente estructura temporal, es decir, $y(0,1)$, $y(0,2)$ y $y(1,2)$.

b) Suponga que el modelo anterior aplica solo cuando se pide prestado (i.e. cuando se venden en corto los bonos). Suponga además que la tasa para depósito (i.e. cuando se compran los bonos) $r(0) = 0$. Calcule la tasa *forward* $f(0,1)$.

5.5 Muestre la proposición 5.5 construyendo un portafolio de bonos que tenga el mismo pago que el derivado.

5.6 Considere un bono que vence en t con valor nominal F y cupones flotantes con $R_k = e^{r(k-1)} - 1$, donde $r(t)$ es la tasa corta.

a) Muestre que $R_k = L(k-1, k-1)$.

b) Muestre que el precio de este bono en tiempo 0 es F.

c) Deduzca la fórmula (5.11) a partir de lo anterior.

5.7 Considere el espacio de probabilidad filtrado descrito en este capítulo y $0 \leq s \leq t \leq T-1$. Sea $Z > 1$ una v.a. $\mathcal{F}(t+1)$-medible con $E_Q[Z] = 1$. Defina la medida de probabilidad P tal que $E_P[X] = E_Q[ZX]$ para toda X v.a. $\mathcal{F}(t+1)$-medible.

a) Sea X una v.a $\mathcal{F}(s)$-medible. Use la propiedad de torre para mostrar que

$$E_P[X] = E_Q[XE_Q[Z|\mathcal{F}(s)]].$$

b) Sea X una v.a $\mathcal{F}(t+1)$-medible. Use a) y la condición (A.5) del valor esperado condicional para mostrar que

$$E_P[X|\mathcal{F}(s)] = \frac{E_Q[ZX|\mathcal{F}(s)]}{E_Q[Z|\mathcal{F}(s)]}.$$

c) Defina $Z = \frac{D(t+1)}{B(0,t+1)}$ y sea X una v.a $\mathcal{F}(t+1)$-medible. Muestre que

$$E_P[X|\mathcal{F}(s)] = \frac{E_Q[D(t+1)X|\mathcal{F}(s)]}{D(s)B(s,t+1)}.$$

d) Considere la tasa LIBOR definida en (5.9). Use c) y la propiedad de torre para mostrar que $\{L(s,t) : s = 0, \ldots, t\}$ es una martingala bajo P.

PARTE II

OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS

Siempre que se hace una inversión en activos financieros con riesgo se está expuesto posibles pérdidas o malos desempeños y por lo tanto es importante darle el peso apropiado a cada activo para que disminuir ese riesgo. A su vez, cómo medir el riesgo no es tampoco una tarea fácil pues su forma de cuantificarlo puede variar de un inversionista a otro y por consiguiente los pesos asignados a cada activo cambian.

En esta segunda parte veremos algunos modelos de optimizacin de portafolios usados, empezando con el modelo de Markowitz y su definición de riesgo, para luego explorar otras medidas de riesgo.

CAPÍTULO 6

OPTIMIZACIÓN DE MEDIA-VARIANZA

En este capítulo veremos un modelo de optimización de portafolios estático (o *buy-and-hold*), es decir, no se permite ningún cambio en el portafolio hasta el tiempo T, que es cuando se liquida el portafolio, en donde el desempeño del portafolio está dado por la media y la varianza de su retorno. Aunque el tipo de activos para invertir puede ser variado, vamos a suponer que estos activos son acciones que satisfacen los supuestos descritos en 1.2.

Supongamos entonces que tenemos las acciones $S_1, \ldots, S_n$ disponibles para invertir y denotamos la tasa de retorno de la acción i durante el período $[0, T]$ como

$$\frac{S_i(T) - S_i(0)}{S_i(0)} = R_i$$

y la tasa de retorno esperada $E[R_i] = \mu_i$.

Consideremos un inversionista con cantidad inicial $V(0)$ para invertir en las n acciones, y sea w_i el peso de cada activo tales que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, de donde se obtiene que

$$\delta_i = \frac{w_i V(0)}{S_i(0)}$$

es el número de acciones de cada activo en el portafolio. Notemos que no es necesario pedir que $w_i \in [0, 1]$ pues esto permite que haya venta corta de activos. Luego, la tasa de retorno del portafolio $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ es

$$\begin{aligned} R_\delta &= \frac{V_\delta(T) - V(0)}{V(0)} \\ &= \frac{1}{V(0)} \sum_{i=1}^{n} (\delta_i S_i(T) - V(0) w_i) \\ &= \frac{1}{V(0)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{w_i V(0)}{S_i(0)} S_i(T) - V(0) w_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\frac{S_i(T) - S_i(0)}{S_i(0)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i R_i \end{aligned} \tag{6.1}$$

y la tasa de retorno esperada del portafolio es $E[R_\delta] = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i$.

Ahora, como se mencionó antes, en este modelo se asume que tan solo la media y la varianza del portafolio es suficiente para evaluar su desempeño y mide el riesgo con la desviación estándar. Debemos entonces calcular la varianza de la tasa de retorno del portafolio δ. Para esto denotamos con σ_{ij} =Cov(R_i, R_j) a la covarianza entre las variables aleatorias R_i y R_j, es decir, $\sigma_{ij} = E[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)]$. Recordemos que cuando $i = j$ la covarianza se convierte en la varianza de la variable R_i denotada por σ_i^2. Así que usando (6.1) tenemos

$$\begin{aligned} \text{Var}(R_\delta) &= E[(R_\delta - E[R_\delta])^2] \\ &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i \right)^2 \right] \\ &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i (R_i - \mu_i) \right) \left(\sum_{j=1}^{n} w_j (R_j - \mu_j) \right) \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j E[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)] \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Es importante recordar también que $\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$, donde $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$ es el coeficiente de correlación entre las variables R_i y R_j.

Asumiendo que las covarianzas entre las tasas de retorno de los activos y sus valores esperados son conocidos por el inversionista, el objetivo es entonces encontrar un portafolio que tenga una tasa de retorno esperada deseada con la mínima varianza (o equivalentemente desviación estándar) posible. Claramente existen infinitos portafolio que obtienen una tasa de retorno deseada y en muchas ocaciones se debe diversificar, es decir, invertir en varios activos, para lograr reducir el riesgo. Para mostrar el efecto de la diversificación vamos a analizar en detalle el caso $n = 2$.

6.1 Dos activos

Dados dos activos y toda la información sobre los dos primeros momentos de sus tasas de retorno, queremos analizar el conjunto de todos los portafolio posibles que se pueden obtener a partir de ellos. Si $w_1 = \alpha$, entonces se tiene que $w_2 = 1 - \alpha$, luego denotamos por R_α a la tasa de retorno del portafolio. De (6.1) y (6.2) se tiene que

$$E[R_\alpha] = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2 \tag{6.3}$$
$$\mathrm{Var}(R_\alpha) = \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2. \tag{6.4}$$

Proposición 6.1 *Si $\rho_{12} < 1$ o $\sigma_1 \neq \sigma_2$ entonces el portafolio con mínima varianza se obtiene con*

$$\alpha = \frac{\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}. \tag{6.5}$$

De lo contrario todos los portafolios factibles tiene la misma varianza.

Demostración: Derivando la ecuación (6.4) con respecto a α e igualando a 0 se tiene que

$$2\alpha(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2) - 2(\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2) = 0,$$

de donde se obtiene la expresión (6.5) siempre que el denominador es distinto de 0. Si $\rho_{12} < 1$ entonces

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 > \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \geq 0.$$

Si $\sigma_1 \neq \sigma_2$, entonces

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \geq (\sigma_1 - \sigma_2)^2 > 0.$$

Por otro lado, si $\rho_{12} = 1$ y $\sigma_1 = \sigma_2$, entonces (6.5) se convierte en

$$(\alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2)^2 = \sigma_1^2.$$

■

Cuando $|\rho_{12}| < 1$ y $\mu_1 \neq \mu_2$, de (6.3) se tiene que $\alpha = \frac{E[R_\alpha]-\mu_2}{\mu_1-\mu_2}$, y sustituyendo en (6.4) se puede mostrar que

$$\mathrm{Var}(R_\alpha) - A^2(E[R_\alpha] - \mu^*) = (\sigma^*)^2, \tag{6.6}$$

donde $\mu^* = \frac{\mu_1\sigma_2^2+\mu_2\sigma_1^2-(\mu_1+\mu_2)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}$ y $(\sigma^*)^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2-\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}$ son la tasa de retorno esperada y la varianza del portafolio de mínima varianza dado por (6.5), y $A^2 = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{(\mu_1-\mu_2)^2}$. Notemos que $A^2 > 0$ y por tanto la ecuación (6.6) es una hipérbola en el plano $\sigma - \mu$.

Cuando $\rho_{12} = 1$ y $\sigma_1 \neq \sigma_2$, con $\alpha = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2}$ se obtiene que el portafolio no tiene riesgo pues la varianza mínima es 0. Este portafolio involucra vender en corto uno de los dos activos. Si $\rho_{12} = -1$ se obtiene 0 riesgo cuando $\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$. La figura 6.1 muestra gráficamente estos resultados.

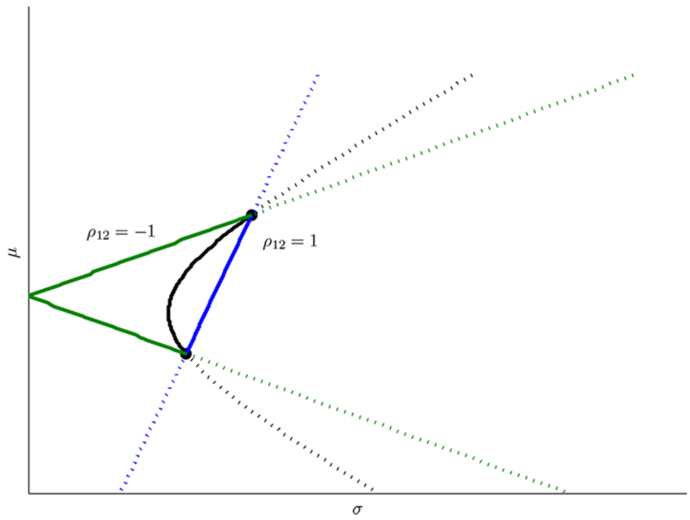

Figura 6.1: Portafolios factibles para varios valores de ρ_{12}.

6.2 Varios activos

Supongamos ahora que el inversionista tiene a su disposición n activos. En este caso es más conveniente usar una notación matricial, luego denotamos con $\boldsymbol{\mu}$ el vector con las tasas de retorno esperada de los activos y con $\boldsymbol{\Sigma}$ a la matriz de covarianza, es decir, $\boldsymbol{\Sigma}_{ij} = \sigma_{ij}$. Igualmente, llamamos $\mathbf{w}$ al vector de pesos asignados por un portafolio, los cuales deben satisfacer que $\mathbf{w}^T\mathbf{1} = 1$. De esta forma, tenemos que

$$E[R_\delta] = \mathbf{w}^T\boldsymbol{\mu} \tag{6.7}$$

$$\text{Var}(R_\delta) = \mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}. \tag{6.8}$$

Un portafolio se llama eficiente si no existe otro portafolio con mayor tasa de retorno esperado y menor varianza. Al conjunto de portafolios eficiente se le llama frontera eficiente. Así, dado $\mu \in \mathbb{R}$, podemos considerar todos los portafolio con tasa de retorno esperada igual μ y entre ellos escoger el de mínima varianza. Esta es la idea del modelo que planteó Markowitz:

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \\ \text{sujeto a} & \mathbf{w}^T\boldsymbol{\mu} = \mu \\ & \mathbf{w}^T\mathbf{1} = 1. \end{array} \tag{6.9}$$

Este problema de optimización es un problema cuadrático convexo pues toda matriz de covarianza es semidefinida positiva. Vamos a asumir además que es en realidad definida positiva, luego $\boldsymbol{\Sigma}$ es invertible. Antes de resolver este problema, encontremos un portafolio eficiente importante, llamado de mínima varianza, y es el portafolio factible con la tasa de retorno con menor varianza de todos. Para esto resolvemos el problema

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \\ \text{sujeto a} & \mathbf{w}^T\mathbf{1} = 1. \end{array} \tag{6.10}$$

Podemos resolver este problema analíticamente usando el método de los multiplicadores de Lagrange. Definimos

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} - \lambda(\mathbf{w}^T \mathbf{1} - 1),$$

y derivando con resspecto a $\mathbf{w}$ e igualando a 0 se tiene que $\mathbf{w} = \frac{\lambda}{2} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}$ (ver problema 6.2). Si multiplicamos esta igualdad por $\mathbf{1}^T$ a la izquierda tenemos que $\lambda = \frac{2}{\mathbf{1}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}$, de donde se obtiene que el portafolio de mínima varianza se obtiene con los pesos

$$w = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}. \tag{6.11}$$

Note que el denominador de la ecuación anterior es siempre positivo pues la inversa de una matriz definida positiva es tambiíen definida positiva.

Volviendo al problema (6.9), usando el métodos de los multiplicadores de Lagrange nuevamente, definimos

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} - \lambda_1(\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - \mu) - \lambda_2(\mathbf{w}^T \mathbf{1} - 1).$$

Derivando con respecto a $\mathbf{w}$ y los multiplicadores e igualando a 0, obtenemos respectivamente

$$\begin{aligned} 2\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} - \lambda_1 \boldsymbol{\mu} - \lambda_2 \mathbf{1} &= 0 \\ \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} &= \mu \\ \mathbf{w}^T \mathbf{1} &= 1, \end{aligned} \tag{6.12}$$

el cual es un sistema de $n+2$ ecuaciones con $n+2$ incógnitas. Si además asumimos que $\boldsymbol{\mu}$ y $\mathbf{1}$ son linealmente independientes, este sistema tiene una única solución y esta solución corresponde a un mínimo del problema pues el problema es convexo. En efecto, la primera de la ecuaciones anteriores implica que

$$2\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \lambda_2 \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}. \tag{6.13}$$

Si multiplicamos la anterior ecuación por $\boldsymbol{\mu}^T$ y $\mathbf{1}^T$ por la izquierda, se obtiene, respectivamente

$$\begin{aligned} \lambda_1 \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \lambda_2 \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} &= 2\mu \\ \lambda_1 \mathbf{1}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \lambda_2 \mathbf{1}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} &= 2, \end{aligned}$$

y el problema 6.3 muestra que este sistema tiene una única solución cuando $\boldsymbol{\mu}$ y $\mathbf{1}$ son linealmente independientes, es decir, cuando no todos los activos tienen la misma tasa de retorno esperada. Finalmente, usando la solución de este sistema en (6.13), podemos encontrar los pesos óptimos del problema.

Teorema 6.2 (Teorema de dos fondos) *Sean* $\mathbf{w}_1$ *y* $\mathbf{w}_2$ *pesos de dos portafolios en la frontera eficiente con* $\mathbf{w}_1^T \boldsymbol{\mu} = \mu^1 \neq \mu^2 = \mathbf{w}_2^T \boldsymbol{\mu}$. *Entonces los pesos de todo portafolio en la frontera se pueden tiene la forma* $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{w}_1 + (1-\alpha)\mathbf{w}_2$ *para algún valor de* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración: Dado un portafolio en la frontera eficiente con tasa de retorno esperada μ, se toma $\alpha = \frac{\mu - \mu^2}{\mu^1 - \mu^2}$, luego $\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} = \mu$. Además $\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1$. Ahora, como $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ satisfacen el sistema (6.12), se tiene que

$$\begin{aligned} 2\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} &= 2\alpha \mathbf{\Sigma}\mathbf{w}_1 + 2(1-\alpha)\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}_2 \\ &= \alpha(\lambda_1^1 \boldsymbol{\mu} + \lambda_2^1 \mathbf{1}) + (1-\alpha)(\lambda_1^2 \boldsymbol{\mu} + \lambda_2^2 \mathbf{1}) \\ &= (\alpha \lambda_1^1 + (1-\alpha)\lambda_1^2)\boldsymbol{\mu} + (\alpha \lambda_2^1 + (1-\alpha)\lambda_2^2)\mathbf{1}. \end{aligned}$$

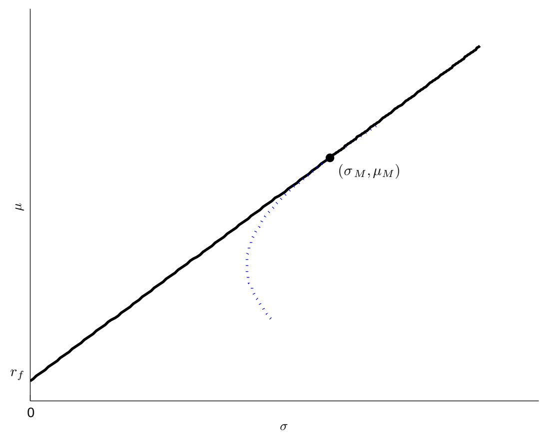

Figura 6.2: Línea de mercado de capitales y portafolio de mercado.

Puesto que el problema (6.9) es convexo, el sistema (6.12) son condiciones necesarias para encontrar el óptimo, luego $\mathbf{w}$ es el óptimo para el problema con tasa de retorno esperada μ. ■

El teorema anterior implica entonces que, dados dos portafolios eficientes se puede reconstruir toda la frontera eficiente como si se tuvieran solo dos activos y por tanto la fontera eficiente es una la sección superior de una hipérbola como la descrita en (6.6), con vértice la media y la varianza de la tasa de retorno del portafolio de mínima varianza.

6.3 Activo sin riesgo

Supongamos ahora que existe un activo libre de riesgo con tasa de retorno r_f. Si volvemos al caso de dos activos, uno de ellos sin riesgo con peso α, y el otro con riesgo con media y varianza de la tasa retorno μ y σ^2, respectivamente, tenemos que $E[R_\alpha] = \alpha r_f + (1-\alpha)\mu$ y $\text{Var}(R_\alpha) = (1-\alpha)^2\sigma^2$. En este caso, tomando valore de $\alpha \leq 1$, obtenemos una línea recta que une los puntos $(0, r_f)$ y (σ, μ) en el plano $\sigma - \mu$.

Cuando tenemos n activos además del activo sin riesgo, la frontera eficiente se convierte en la línea recta que pasa por $(0, r_f)$ y es tangente a la sección de hipérola que representa la frontera eficiente cuando no se incluye el activo libre de riesgo, como se ve en la figura 6.2. Esta línea se conoce como línea de mercado de capitales o CML por sus siglas en inglés. El portafolio que representa el punto de tangencia (σ_M, μ_M) se le llama portafolio de mercado. Note que este punto de tangencia solo existe cuando r_f es menor que la tasa de retorno esperada del portafolio de mínima varianza dado por (6.11), es decir, cuando

$$(\boldsymbol{\mu}^T - r_f \mathbf{1}^T)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} > 0. \tag{6.14}$$

Para encontrar el portafolio de mercados, tomemos (σ, μ) un punto en la región factible con pesos $\mathbf{w}$, luego la pendiente de la recta que une a $(0, r_f)$ con (σ, μ) está dada

$$\frac{\mathbf{w}^T\boldsymbol{\mu} - r_f}{\sqrt{\mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}}}.$$

Usando multiplicadores de Lagrange de nuevo para maximizar esta expresión sujeto a $\mathbf{w}^T\mathbf{1} = 1$, se obtiene la ecuación

$$\frac{\sqrt{\mathbf{w}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}} - \frac{\mathbf{w}^T\boldsymbol{\mu} - r_f}{\sqrt{\mathbf{w}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}}{\mathbf{w}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}} - \lambda\mathbf{1} = 0,$$

que se puede rescribir como

$$\frac{\mu - r_f}{\sigma^2}\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} = \boldsymbol{\mu} - \lambda\sigma\mathbf{1},$$

que al multiplicarla por la izquierda por $\mathbf{w}^T$, se obtiene $\mu - r_f = \mu - \lambda\sigma$, es decir, $\lambda = \frac{r_f}{\sigma}$. Luego

$$\frac{\mu - r_f}{\sigma^2}\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} = \boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1}. \tag{6.15}$$

Ahora, si multiplicamos la ecuación (6.15), primero por $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ y luego por $\mathbf{1}^T$, tenemos que

$$\frac{\mu - r_f}{\sigma^2} = \mathbf{1}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1}) > 0,$$

por (6.14). Finalmente, encontramos que los pesos del portafolio de mercado están dados por

$$\mathbf{w}_M = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})}{\mathbf{1}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})}.$$

Usando esto podemos encontrar σ_M y μ_M y de esta forma la CML tiene la forma

$$\mu = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}\sigma. \tag{6.16}$$

Note que la pendiente de esta recta tiene la forma del precio de mercado de riesgo visto en el capítulo 4. En este contexto, el teorema de dos fondos nos dice que todo portafolio en la frontera eficiente se puede construir con una combinación apropiada del activo libre de riesgo y el portafolio de mercado.

6.3.1 CAPM

La línea de mercado de capitales descrita anteriormente describe perfectamente cualquier portafolio eficiente relacionando la media de la tasa de retorno con su varianza a partir del portafolio de mercado y el activo libre de riesgo. El siguiente teorema, conocido como CAPM (*Capital Asset Procong Model*) relaciona la tasa de retono esperada de cualquier activo (o portafolio factible) con su riesgo. Lo importante de este resultado es que muestra que su riesgo lo determina las covarianzas con los demás activos y no su propia varianza.

Teorema 6.3 (CAPM) *Suponga que el* (6.14) *se satisface, es decir, que el portafolio de mercado existe. Entonces para* $i = 1, \ldots, n$ *se tiene que*

$$\mu_i = r_f + \beta_i(\mu_M - r_f), \tag{6.17}$$

donde $\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$ *con* R_M *la tasa de retorno del portafolio de mercado.*

Demostración: Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere el portafolio con peso α en el activo i y peso $1 - \alpha$ en el portafolio de mercado. Si denotamos R_α a la tasa de retorno de tal portafolio, entonces $E[R_\alpha] = \alpha\mu_i + (1-\alpha)\mu_M$ y $\text{Var}(R_\alpha) = \alpha^2\sigma_i^2 + (1-\alpha)^2\sigma_M^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{iM}$, donde $\sigma_{iM} = \text{Cov}(R_i, R_M)$. A medida que α varía tenemos una hipérbola que recorre los puntos $(\sigma_\alpha, \mu_\alpha)$, con $\mu_\alpha = E[R_\alpha]$ y $\sigma_\alpha = \sqrt{\text{Var}(R_\alpha)}$. Note que esta curva no puede cruzar la CML, pues esta es la frontera eficiente. Luego a medida que α se acerca a 0 la hipérbola debe ser tangente a la CML y por tanto

$$\left.\frac{d\mu_\alpha}{d\sigma_\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}.$$

Ahora,

$$\left.\frac{d\mu_\alpha}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \mu_i - \mu_M$$

y

$$\left.\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M},$$

luego

$$\frac{\mu_i - \mu_M}{\frac{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}} = \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M},$$

de donde se obtiene (6.17). ■

Como se mencionó antes, el resultado anterior implica que el riesgo asociado al activo i está representado en β_i, en lugar de σ_i. Para entender este fenómeno, sea ϵ_i una variable aleatoria tal que

$$R_i = r_f + \beta_i(R_M - r_f) + \epsilon_i.$$

Si tomamos valor esperado, el teorema anterior nos dice que $E[\epsilon_i] = 0$. Ademas, $\text{Cov}(R_i, R_M) = \beta_i + \text{Cov}(\epsilon_i, R_M)$, luego $\text{Cov}(\epsilon_i, R_M) = 0$, y por tanto

$$\sigma_i^2 = \text{Var}(R_i) = \beta_i^2\sigma_M^2 + \text{Var}(\epsilon_i).$$

Es decir, el risgo del activo i está compuesto de dos partes, $\beta_i^2\sigma_M^2$ llamado riesgo sistemático propio del mercado, y $\text{Var}(\epsilon_i)$ llamado riesgo no sistemático o específico que no está correlacionado con el mercado y el cual se puede reducir con diversificación. Para los portafolios sobre la CML, de (6.16) y (6.17), se tiene que $\sigma = \beta\sigma_M$, es decir, no tienen riesgo específico pues se logró eliminar usando diversificación.

PROBLEMAS

6.1 Sean A y B dos activos con $\rho_{AB} = -1$, $\mu_A = 8\%$, $\mu_B = 12\%$, $\sigma_A = 15\%$ y $\sigma_B = 25\%$. Calcule la tasa libre de riesgo.

6.2 Sea $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, con $\mathbf{A}$ una matriz simétrica de $n \times n$. Muestre que $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$.

6.3 Sea $\mathbf{A}$ una matriz definida positiva y $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ dos vectores linealemente independientes. Muestre que la matriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} & \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x} & \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y} \end{pmatrix}$$

es invertible.

6.4 Usando datos de precio de cierre semanales entre enero 1 2012 y diciembre 31 de 2014 de 30 acciones, estime las tasas de retorno esperada y la matriz de covarianza.

a) Encuentre el portafolio de mínima varianza y varíe μ para encontrar la frontera eficiente resolviendo el problema (6.9).
b) Repita el procedmiento anterior pero esta vez no permita venta en corto en ningún activo. Compare la cantidad de activos con peso 0 con el caso anterior.
c) Encuentre de nuevo la frontera eficiente (permitiendo venta corta) eliminando los primeros 5 datos del 2012 y agregando los primeros 5 datos del 2015. Repita este procedimiento 10 veces. ¿Qué tan sensible es la frontera al cambio en los datos?

6.5 Suponga n activos no correlacionados, todos con la misma tasa de retorno esperada μ. Sea σ_i^2 la varianza del activo i.

a) Dibuje la frontera eficiente de este conjunto de activos.
b) Encuentre el punto de mínima varianza en términos de las varianzas de los activos.

6.6 Sea $\alpha \geq 0$ y consdere el problema

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} - \alpha \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \\ \text{sujeto a} & \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1. \end{array}$$

Muestre que al variar los valores de α, los pesos óptimos de este problema recorre los pesos de todos los portafolios eficientes.

6.7 Suponga que se quiere construir un portafolio con n activos con riesgo que se acerque lo mejor posible a un portafolio objetivo con tasa de retorno R_O (por ejemplo un índice). La forma como se mide la distancia es usando la varianza. Es decir, se quiere resolver el problema:

$$\begin{array}{rl} \min & \text{Var}(R_O - \mathbf{w}^T \mathbf{R}) \\ \text{sujeto a} & \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1. \end{array}$$

Usando multiplicadores de Lagrange, escriba las ecuaciones que satisface un portafolio óptimo $\mathbf{w}$. (Escriba las ecuaciones en términos de las varianzas y convarianzas de las tasas de retorno n activos y del portafolio objetivo R_O).

6.8 Muestre que el factor β de un portafolio con pesos $\mathbf{w}$ está dado por $\mathbf{w}^T \boldsymbol{\beta}$, donde $\boldsymbol{\beta}$ es el vector con $\beta_1, \ldots, \beta_n$.

6.9 La tasa de retorno esperada y la desviación estándar del portafolio de mercado son 8% y 12%, respectivamente. La tasa de retorno esperada del activo A es 6%. La desviación estándar del activo B es 18%, y su β es $\frac{7}{6}$. Un portafolio que invierte $\frac{1}{3}$ de su valor en A y $\frac{2}{3}$ en B tiene un β de 1. Si el mercado satisface CAPM, calcule la tasa de retorno libre de riesgo y la tasa de retorno esperada de B. Diga si B es un activo eficiente.

6.10 Use la ecuación (6.15) para mostrar la fórmula de CAPM (6.17).

CAPÍTULO 7

OTRAS MEDIDAS DE RIESGO

[7]

PROBLEMAS

7.1 Sea X es una variable aleatoria distribuida Exp(λ), es decir, $P[X \leq x] = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$. Calcular $\text{ES}_\alpha(X)$.

7.2 Repita el problema 6.4 pero esta vez usando $\text{ES}_{0,95}$ como medida de riesgo.

7.3 Sea $U(x) = -e^{-\alpha x}$, con $\alpha > 0$, la función de utilidad de un inversionista. Muestre que si las tasas de retorno de los activos $\mathbf{R}$ tienen una dsitribución normal conjunta con parámetros $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$, el problema

$$\begin{array}{rl} \min & E[U(\mathbf{w}^T\mathbf{R})] \\ \text{sujeto a} & \begin{array}{l} \mathbf{w}^T\boldsymbol{\mu} = \mu \\ \mathbf{w}^T\mathbf{1} = 1 \end{array} \end{array}$$

es equivalente al problema de Markowitz.

APÉNDICE A

PROBABILIDAD

A.1 Elementos básicos

Un *espacio de probabilidad* consiste de una tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que :

- Ω, el *espacio muestral*, es un conjunto de realizaciones ω.
- $\mathcal{F}$ es una colección de subconjuntos de Ω donde cada elemento $A \in \mathcal{F}$ se le denomina *evento*. $\mathcal{F}$ debe además ser una $\sigma-$álgebra, es decir, contener a Ω, cerrada bajo complemento y cerrada bajo unión contable.

  Cuando el espacio muestral es finito, se toma $\mathcal{F}$ como el conjunto de todos los subconjuntos de Ω.
- $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ asigna a cada $A \in \mathcal{F}$ la probabilidad del evento $P(A)$. Este mapa debe ser una medida de probabilidad, es decir, $P(\Omega) = 1$ y σ-aditiva: Si A_n, $n \geq 1$ son eventos disjuntos de $\mathcal{F}$ entonces

  $$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

  Cuando el espacio muestral es finito definir la probabilidad de cada realización $P(\{\omega_i\})$ es suficiente.

Una variable aleatoria definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que para todo $c \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\{X \leq c\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq c\} \in \mathcal{F}.$$

Si el espacio muestral es finito toda función es una variable aleatoria. Si X satisface que

$$\{X \leq c\} \in \mathcal{G}$$

para una sub-σ-álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, se dice que X es $\mathcal{G}$-medible (y se nota $X \in \mathcal{G}$). Se denota $\sigma(X)$ a la σ-álgebra más pequeña que contenga los eventos de la forma $\{X \leq c\}$. Claramente se tiene que $X \in \sigma(X)$ para toda variable aleatoria X.

La función de distribución de una variable aleatoria X, $F_X(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$ está dada por

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Esta función es siempre no-decreciente y continua por derecha. Si existe una función f no negativa tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy, \tag{A.1}$$

entonces se dice que f es la densidad de probabilidad de X.

EJEMPLO A.1

Un ejemplo muy importante es la distribución normal. Una variable aleatoria X tiene la distribución normal con parámetros μ y σ^2, y se denota $N(\mu, \sigma^2)$ si tiene densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

El caso $N(0, 1)$ se llama normal estándar.

Definición A.1 *Los eventos $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ son independientes si*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) =: P(A_1, \ldots, A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Definición A.2 *Las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ definidas todas en el mismo espacio de probabilidad son independientes si los eventos $A_i = \{X_i \leq c_i\}$ son independientes para todo $c_i \in \mathbb{R}$.*

EJEMPLO A.2

Una variable aleatoria X tiene la distribución binomial con parámetros n, entero positivo, y $p \in (0, 1)$ si toma valores en $\{0, \ldots, n\}$ y su función de distribución es

$$B(k; n, p) := P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

X se puede ver como la suma de n variables aleatorias independientes que se distribuyen Bernoulli, es decir, variables que toman solo los valores 0 y 1 con probabilidad $1-p$ y p respectivamente. El ejercicio A.2 muestra el espacio muestral y la medida de probabilidad apropiadas para construir estas variables independientes.

Otra forma de definir la independencia de variables aleatorias es a través de la indepecia de sub-σ-álgebras: $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son independientes si $A \in \mathcal{G}$ es independiente de $B \in \mathcal{H}$. Así, X y Y variables aleatorias son independientes si $\sigma(X)$ es independiente de $\sigma(Y)$.

Dada una variable aleatoria X en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ la definición precisa del *valor esperado* es

$$E[X] := \int_\Omega X(\omega)dP(\omega),$$

donde la integral se toma en el sentido de Lebesgue. Por ejemplo, cuando $X = 1_A$ es la función indicadora de un conjunto $A \in \mathcal{F}$, es decir,

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A, \end{cases}$$

entonces $E[1_A] = \int_A dP(\omega) = P(A)$ por definición de la integral de Lebesgue. Puesto que el valor esperado es una integral, se tiene que es lineal, luego $E[aX+bY] = aE[X] + b[Y]$. Se denomina momento de orden k de la variable X a $E[X^k]$ para k entero positivo. La varianza de la variable es $\mathrm{Var}(X) = E\left[(X - E[X])^2\right]$.

Para nuestros propósitos no es necesaria esta definición general de la teoría de probabilidad, pero puede consultar [11] para conocer los detalles. Cuando el espacio muestral es finito, el valor esperado de X es

$$E[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)p_\omega, \tag{A.2}$$

donde $p_\omega = P(\{\omega\})$. Ahora, si denotamos R al conjunto de valores que toma la variable X (es decir, $R = X(\Omega)$) y para cada $x \in R$ definimos $p_x = P(X = x)$, entonces

$$E[X] = \sum_{x\in R} xp_x. \tag{A.3}$$

Si X tiene función de distribución $F_X(x)$, una forma equivalente de ver el valor esperado de X es mediante la integral

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xdF_X(x),$$

en el sentido de Riemann-Stieltjes. Si además X tiene densidad de probabilidad f entonces

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

EJEMPLO A.1 continuación

Si X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$ entonces $E[X] = \mu$ y $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

Se puede mostrar (ver [11]) que dos variables X y Y son independientes si y solo si

$$E[XY] = E[X]E[Y]. \tag{A.4}$$

EJEMPLO A.2 continuación

Si Y tiene distribución Bernoulli, de (A.3) se tiene que $E[Y] = 0(1-p)+1p = p$. Por la linealidad del valor esperado, si X tiene distribución binomial entonces, $E[X] = E[Y_1 + \cdots + Y_n] = np$. Usando (A.4) se puede ver que Var$(X) = np(1-p)$.

Dada una variable aleatoria X la función generadora de momentos de X se define como $M_X(\lambda) = E\left[e^{\lambda X}\right]$ para $\lambda \in \mathbb{R}$. Puesto que esta función no siempre existe, una alternativa a este problema es la función característica de X definida como $\phi_X(u) = E\left[e^{iuX}\right]$, donde $i = \sqrt{-1}$, para $u \in \mathbb{R}$. La función característica siempre existe y además $|\phi_X(u)| \leq 1$ siempre.

EJEMPLO A.1 continuación

Si X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$ entonces tiene función generadora de momentos $M_X(\lambda) = e^{\lambda\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2}$ y función característica $\phi_X(u) = e^{iu\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2}$.

Uno de los resultados más importantes de la teoría de probabilidad es el Teorema del Límite Central:

Teorema A.3 *Sean $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) con valor esperado μ y varianza σ^2, todas definidas en el mismo espacio de probabilidad. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy,$$

es decir, $\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ converge en distribución a una $N(0,1)$.

La prueba de este teorema se puede encontrar en [11] y se basa en el hecho de que dos variables con la misma función caracterśtica (o generadora de momentos si existe) tienen la misma distribución.

Dadas X y Y variables aleatorias, decimos que $X = Y$ casi siempre (c.s.) si solo difieren en conjuntos de probabilidad 0, es decir, $P(X \neq Y) = 0$.

Note que el concepto de independencia, la definición de función de distribución, valor esperado e igualdad c.s., dependen de la medida de probabilidad P usada. Si cambiamos la medida podemos encontrar, por ejemplo, que eventos que antes eran independientes ya no lo son o viceversa.

Definición A.4 *Dos medidas de probabilidad P y P' sobre Ω son equivalentes si para todo evento $A \in \mathcal{F}$ se tiene que $P(A) = 0$ si y solo si $P'(A) = 0$.*

Si dos variables aleatorias son iguales c.s. bajo una medida, lo son bajo todas sus medidad equivalentes.

A.2 Valor esperado condicional

Dada una variable X tal que $E[|X|] < \infty$ (es decir, X es integrable) y una sub-σ-álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, el *valor esperado condicional* de X dada $\mathcal{G}$, denotado como $E[X|\mathcal{G}]$, es la única variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible (salvo conjuntos de probabilidad cero) tal que

$$E[X1_A] = E[E[X|\mathcal{G}]1_A] \tag{A.5}$$

para todo $A \in \mathcal{G}$. La prueba de la existencia y la unicidad de esta variable aleatoria en el contexto más general se puede encontrar en [11].

Cuando la sub-σ-álgebra $\mathcal{G}$ se puede especificar a partir de una partición finita $\mathcal{P} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ de Ω tomando todas las posibles uniones de los conjuntos de la partición (y se denota $\sigma(\mathcal{P})$), se tiene que una variable es $\mathcal{G}$-medible si y solo si es constante en los conjuntos de la partición. En este caso se tiene la siguiente proposición

Proposición A.5 *Dada X variable aleatoria integrable y una sub-σ-álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, el valor esperado condicional $E[X|\mathcal{G}]$ es constante en los conjuntos de la partición que generan a $\mathcal{G}$ que tienen probabilidad positiva y su valor está dado por $\frac{E[X1_{A_i}]}{P(A_i)}$.*

Cuando el espacio muestral es finito toda sub-σ-álgebra se puede especificar a partir de una partición $\mathcal{P}$. Las siguientes son algunas propiedades importantes del valor esperado condicional. Sean X y Y variables aleatorias integrables y $\mathcal{G}$ sub-σ-álgebra, entonces:

1. $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$.

   Demostración: Tome $A = \Omega$ en (A.5). ■

2. Si $X \in \mathcal{G}$, entonces $E[X|\mathcal{G}] = X$ c.s.

   Demostración: Esto es consecuencia directa de la definición del valor esperado condicional dada la unicidad. ■

3. $E[aX + bY|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}] + bE[Y|\mathcal{G}]$ c.s.

   Demostración: Se sigue de la linealidad del valor esperado y la unicidad del valor esperado condicional. ■

4. Si $X \geq 0$ c.s., entonces $E[X|\mathcal{G}] \geq 0$ c.s.

   Demostración: Por contradicción, supongamos que existe $A \in \mathcal{G}$ con $P(A) > 0$ tal que $E[X|\mathcal{G}] < 0$ en A. Entonces $0 > E[E[X|\mathcal{G}]1_A] = E[X1_A]$, pero esto es imposible pues $X \geq 0$. ■

5. (Propiedad de torre) Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ sub-σ-álgebra, entonces $E\left[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}\right] = E\left[E[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}\right] = E[X|\mathcal{H}]$ c.s.

   Demostración: Sea $A \in \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ y defina $Z = E\left[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}\right]$, entonces por (A.5) $E[Z1_A] = E[E[X|\mathcal{G}]1_A] = E[X1_A]$, luego $Z = E[X|\mathcal{H}]$ c.s. Análogamente, si definimos $Z = E\left[E[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}\right]$, entonces $E[Z1_A] = E[E[X|\mathcal{H}]1_A] = E[X1_A]$. ■

6. (Sacar lo conocido) Si $Y \in \mathcal{G}$ acotada, entonces $E[XY|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}]$ c.s.

   Demostración: Veamos solo el caso cuando $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{P})$ para una partición finita. Usando la proposición A.5 y el hecho de que Y es constante en los A_i se tiene que $E[XY|\mathcal{G}]$ toma el valor $\frac{E[XY1_{A_i}]}{P(A_i)} = Y(A_i)\frac{E[X1_{A_i}]}{P(A_i)}$ en cada conjunto de la partición. ■

7. (Independencia) Si $\sigma(X)$ es independiente de $\mathcal{G}$ entonces $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$ c.s.

Demostración: Dado $A \in \mathcal{G}$ se tiene que $E[X1_A] = E[X]E[1_A] = E[E[X]1_A]$, donde la primera igualdad se tiene por la independencia. ■

A.3 Procesos estocásticos en tiempo discreto y martingalas

Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias todas ellas definidas en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. En esta sección consideraremos solamente procesos estocásticos indexados por un conjunto finito de tiempos $\{X(t) : t = 0, 1, \ldots, T\}$. Una filtración es una familia $\{\mathcal{F}(t) : t = 0, 1, \ldots, T\}$ de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ tales que

$$\mathcal{F}(0) \subset \mathcal{F}(1) \subset \cdots \subset \mathcal{F}(T).$$

Cuando Ω es finito, recordemos que las sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ se pueden determinar a partir de una partición del espacio, luego las particiones que generan la filtración son cada vez más finas a medida que el tiempo aumenta. Cuando se considera el espacio de probabilidad junto con una filtración dada, se dice que $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}(t)\}, P)$ es un espacio filtrado.

Definición A.6 *Un proceso estocástico en un espacio filtrado se dice adaptado si para cada* $t = 0, \ldots, T$ *se tiene que* $X(t) \in \mathcal{F}(t)$.

Dado un proceso $\{X(t)\}$ en un espacio de probabilidad siempre podemos definir la filtración generada por el proceso como $\mathcal{F}(t) = \sigma(\{X(s) : s = 0, 1, \ldots, t\})$, para la cual es proceso es adaptado.

Vamos a suponer siempre que tenemos un espacio filtrado en lo que sigue.

Definición A.7 *Un proceso estocástico se dice predecible si para cada* $t = 1, \ldots, T$ *se tiene que* $X(t) \in \mathcal{F}(t-1)$.

Definición A.8 *Un proceso estocástico* $\{X(t)\}$ *es una (super)martingala con respecto a la filtración si se cumple que*

1. *El proceso es adaptado:* $X(t) \in \mathcal{F}(t)$ *para todo* $t = 0, 1, \ldots, T$.
2. *Las variables son integrables:* $E[|X(t)|] < \infty$ *para todo* $t = 0, 1, \ldots, T$.
3. $E[X(t+1)|\mathcal{F}(t)](\leq) = X(t)$ *para todo* $t = 0, \ldots, T-1$.

Definición A.9 *Un tiempo de parada* τ *es un variable aleatoria que toma valores en* $\{0, \ldots, T\}$ *tal que para todo* t *es este conjunto se tiene que*

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}(t).$$

Es equivalente pedir la condición $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}(t)$: Puesto que $\{\tau \leq t-1\} \in \mathcal{F}(t-1) \subset \mathcal{F}(t)$, entonces $\{\tau = t\} = \{\tau \leq t\} \setminus \{\tau \leq t-1\} \in \mathcal{F}(t)$. Para el converso, notemos que $\{\tau \leq t\} = \bigcup_{s=0}^{t} \{\tau = s\} \in \mathcal{F}(t)$ por ser una filtración.

PROBLEMAS

A.1 [2] Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ un espacio muestral. Sea $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{4}$, $1 \leq i \leq 4$. Sean A, B y C los siguientes eventos: $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ y $C = \{\omega_1, \omega_3\}$. Muestre que los eventos no son independientes aunque A es independiente de B, A de C y B de C.

A.2 Sea $\Omega = \{C, S\}^n$ cuyos elementos son $\omega = (a_1 \ldots a_n)$ con $a_i \in \{C, S\}$ y defina la medida de probabilidad uniforme, es decir, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ para todo $\omega \in \Omega$. Defina las variables aleatorias

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1, & a_i = C \\ -1 & a_i = S. \end{cases}$$

a) Muestre que $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ para todo i.

b) Muestre que las variables aleatorias son independientes.

A.3 Muestre que si X se distribuye $N(\mu, \sigma^2)$ entonces $M_X(\lambda) = e^{\lambda\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2}$.

A.4 Muestre la proposición A.5.

A.5 Sean $A \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{P})$ para una partición finita con $0 < P(A_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Muestre que $E[1_A|\mathcal{G}] = \sum_{i=1}^{n} P(A|A_i) 1_{A_i}$

A.6 Sea $\{X(t)\}$ un proceso en un espacio filtrado. Muestre que $E[X(t+1)|\mathcal{F}(t)] = X(t)$ para todo $t = 0, \ldots, T-1$ si y solo si $E[X(s)|\mathcal{F}(t)] = X(t)$ $t = 0, \ldots, T-1$ y todo $s = t+1, \ldots, T$

APÉNDICE B

PROGRAMACIÓN LINEAL

B.1 Problemas de programación lineal

Un problema de programación lineal consiste en optimizar una función lineal en $\mathbb{R}^n$, sujeto a restricciones lineales de igualdad o desigualdad. En un problema de programación lineal en general tenemos un vector de costo $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, conjuntos finitos de índice M_1, M_2 y M_3 con vectores $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ y escalares b_i para cada i en estos conjuntos y subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$, N_1 y N_2, que conforman el problema de optimización

$$\begin{array}{rll} \min \setminus \max & \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \\ \text{sujeto a} & \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i, & i \in M_1 \\ & \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq b_i, & i \in M_2 \\ & \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i, & i \in M_3 \\ & x_j \geq 0, & j \in N_1 \\ & x_j \leq 0, & j \in N_2, \end{array}$$

donde $\mathbf{x}$ es el vector de las variables de decisión. Puesto que una restricción de igualdad se puede escribir con dos restricciones de desigualdad, usando notación matricial, podemos escribir cualquier problema de programación lineal de la forma

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \end{array} \tag{B.1}$$

con $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ (luego se tienen m restricciones) e interpretando la desigualdad entre vectores componente por componente. Note también que cambiando el vector de costos, un problema de maximización se puede convertir en un problema de minimización. La forma (B.1) se denomina forma general de un programa lineal. Otra forma muy usada para expresar un problema lineal es la llamada forma estándar

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} & \begin{array}{r} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array} \end{array} \tag{B.2}$$

Introduciendo nuevas variables siempre es posible expresar un problema de la forma (B.1) en la forma (B.2) (los detalles los puede encontrar en [1]).

B.2 Problema dual

Consider el problema en forma estándar (B.2), al cual llamaremos problema *primal*. Introducimos ahora la función

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}),$$

donde $\mathbf{p}$ es un vector con las dimensiones adecuadas para que las operaciones se puedan realizar. Dado $\mathbf{x}$ fijo se tiene que

$$\max_{\mathbf{p}} L(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \begin{cases} \mathbf{c}^T\mathbf{x}, & \text{si } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ +\infty, & \text{de lo contrario,} \end{cases}$$

luego el problema primal es equivalente a

$$\min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}} \max_{\mathbf{p}} L(\mathbf{x}, \mathbf{p}).$$

Ahora, si fijamos $\mathbf{p}$ se tiene que

$$\min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}} L(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T\mathbf{b} + \min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}}(\mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \begin{cases} \mathbf{p}^T\mathbf{b}, & \text{si } \mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}^T \\ -\infty, & \text{de lo contrario.} \end{cases} \tag{B.3}$$

Definimos entonces el problema *dual* como

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{p}^T\mathbf{b} \\ \text{sujeto a} & \mathbf{p}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T, \end{array}$$

el cual es equivalente a

$$\max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}} L(\mathbf{x}, \mathbf{p}).$$

El procedimiento anterior siempre los podemos hacer sin importar el tipo de restricciones ni el signo de las variables en el problema primal. De esta forma encontramos las relaciones que se presentan en la tabla B.1.

Vemos que por cada restricción en el problema primal se tiene una variable en el problema dual y por cada variable se introduce una restricción. Tambin se puede ver fácilmente que el problema dual del dual vuelve a ser el primal.

PRIMAL	minimizar	maximizar	DUAL
restricciones	$\geq b_i$ $\leq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 libre	variables
variables	≥ 0 ≤ 0 libre	$\leq c_j$ $\geq c_j$ $= c_j$	restricciones

Tabla B.1: Relación entre las variables y restrcciones de los problemas primal y dual.

B.3 Teoremas de dualidad

De la sección anterior tenemos que el primal es equivalente a $\min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}} \max_{\mathbf{p}} L(\mathbf{x},\mathbf{p}) \geq \max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}} L(\mathbf{x},\mathbf{p})$, que es equivalente al dual, luego el valor óptimo del dual es siempre menor que el valor óptimo del primal. Este resultados se llama *dualidad débil* y tenemos el siguiente teorema:

Teorema B.1 *Si* $\mathbf{x}$ *es factible (es decir, satisface las restricciones) del primal y* $\mathbf{p}$ *es factible del dual, entonces*

$$\mathbf{p}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}.$$

Demostración: Definimos

$$u_i = p_i(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i), \tag{B.4}$$

$$v_j = (c_j - \mathbf{p}^T\mathbf{A}_j)x_j, \tag{B.5}$$

donde $\mathbf{a}_i$ es la i-ésima fila y $\mathbf{A}_j$ es la j-ésima columna de $\mathbf{A}$. De la tabla B.1 se tiene que $u_i \geq 0$ y $v_j \geq 0$, para todo i, j. Además,

$$\sum_i u_i = \mathbf{p}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$$

$$\sum_j v_j = (\mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A})\mathbf{x},$$

y sumando estas dos igualdades se tiene que $0 \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b}$. ■

Del anterior teorema podemos concluir los siguiente:

- Si el problema primal es no acotado, es decir, siempre podemos encontrar un $\mathbf{x}$ factible tal que la función objetivo se vaya a $-\infty$, entonces el problema dual no es factible.
- Si el problema dual es no acotado, la función objetivo se va a $+\infty$, entonces el problema primal es infactible.
- Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{p}$ son factibles tales que $\mathbf{p}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, entonces son soluciones óptimas para sus respectivos problemas, y esto se tiene si y solo si las ecuaciones (B.4) y (B.5) son iguales a 0. Esta condición se conoce con el nombre de holgura complementaria.

El siguiente teorema es escencial en la teoría de programación lineal y se conoce como *dualidad fuerte*. Su demostración se puede encontrar en [1].

Teorema B.2 *Si un problema de programación lineal tiene una solución óptima, entonces su problema dual también la tiene y sus valores óptimos son los mismos.*

Los teoremas de dualidad permiten construir la tabla B.2.

	Finito	No acotado	Infactible
Finito	✓	✗	✗
No acotado	✗	✗	✓
Infactible	✗	✓	✓

Tabla B.2: Diferentes posibilidades para el primal y el dual.

PROBLEMAS

B.1 [1]Suponga que X es una variable aleatoria que toma valores en $\{0, \ldots, l\}$ con $P(X = k) = p_k$, para k en este conjunto, desconocidos. Suponiendo que conoce los dos primeros momentos de la variable, μ y μ_2, escriba programas lineales que calculan una cota superior y una inferior para el momento de orden 4.

REFERENCIAS

1. D. Bertsimas and J. Tsitsiklis. *Introduction to Linear Optimization*. Athena Scientific, 1997.
2. P. Brémaud. *An Introduction to Probabilistic Modeling*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlang, 1988.
3. M. Capiński and T. Zastawniak. *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlang, second edition, 2011.
4. N. J. Cutland and A. Roux. *Derivative pricing in Discrete Time*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlang, 2012.
5. J. Cvitanić and F. Zapatero. *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*. MIT Press, 2004.
6. D. G. Luenberger. *Investment Science*. Oxford University Press, 1998.
7. A. J. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts. *Quantitative risk management : concepts, techniques and tools*. Princeton series in finance. Princeton University Press, 2005.
8. P. Mörters and Y. Peres. *Brownian Motion*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2010.
9. B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, sixth edition, 2010.
10. S. E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer Finance Textbooks. Springer, 2004.
11. D. Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.

Índice